

Estimation de résolvante et construction de quasimode près du bord du pseudospectre

William Bordeaux Montrieux

Department of Mathematics

University of Toronto

Toronto, Ontario, Canada, M5S 2E4

william.montrieux@utoronto.ca

Résumé

Nous considérons un opérateur h -pseudodifférentiel non-autoadjoint dans la limite semiclassique. p désigne le symbole principal. Nous savons que la résolvante existe à l'intérieur de l'image de p jusqu'à une distance $\mathcal{O}((h \ln \frac{1}{h})^{\frac{k}{k+1}})$, de certains points du bord, où $k \in \{2, 4, \dots\}$. Dans ce travail, nous précisons les estimations de résolvantes qu'ont obtenues différents auteurs dans le cas $k = 2$, et en dimension 1. Pour la preuve, il s'agit de construire, via un scaling, des quasimodes pour des valeurs du paramètre spectral très proches du bord de l'image de p .

Abstract

We consider a non-self-adjoint pseudodifferential operator in the semi-classical limit ($h \rightarrow 0$). The principal symbol is given by p . We know that the resolvent $(z - P)^{-1}$ exists inside the range up to a distance $\mathcal{O}((h \ln \frac{1}{h})^{\frac{k}{k+1}})$ from certain boundary points, where $k \in \{2, 4, \dots\}$. In this work, we improve the resolvent estimates given by different authors in the case $k = 2$, and in dimension one. For the proof, we will construct quasimodes by a scaling for z very close to the boundary.

Table des matières

1 Introduction

2

2	Modèle sur \mathbb{R} à paramètre	7
2.1	Ensemble d'énergie pour de petites valeurs du paramètre . . .	8
2.2	Problème de Grushin.	9
2.3	Estimation de résolvante près du bord de l'image du symbole.	19
3	Cas général en dimension 1	22
3.1	Estimation de résolvante : cas 1	25
3.2	Estimation de résolvante : cas 2	29
4	Exemples	32
4.1	Cas 1 : L'opérateur cubique non-autoadjoint	33
4.2	Cas 2 : Oscillateur harmonique non-autoadjoint	35
4.3	Opérateur d'advection-diffusion	40

1 Introduction

Dans [5], N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski obtiennent une estimation de la résolvante pour certains points du bord de l'image du symbole principal. Dans le cas d'un point z_0 de type fini d'ordre k , ils obtiennent que la résolvante a une croissance en $h^{-\frac{k}{k+1}}$, dans des disques de rayon $\mathcal{O}(h^{\frac{k}{k+1}})$ centrés en z_0 . Dans [16], J. Sjöstrand montre que la résolvante peut s'étendre à des disques de rayon $\mathcal{O}((h \ln \frac{1}{h})^{\frac{k}{k+1}})$, et donne une majoration pour la résolvante. Une majoration similaire avait été obtenue auparavant par l'auteur pour un opérateur modèle $hD_x + g(x)$, $x \in S^1$, avec $k = 2$, voir [1] Chapitre 4. On citera aussi J. Martinet [12] qui obtient un encadrement de la norme de la résolvante pour l'opérateur d'Airy complexe. La preuve est basée sur une analyse directe du semigroupe après conjugaison par la transformée de Fourier. Dans ce travail, il s'agit d'améliorer et généraliser les estimations de la résolvante obtenues par ces différents auteurs. On se limite au cas d'un point d'ordre 2, et à la dimension 1. Les estimations obtenues nous permettent de préciser l'estimation de résolvante obtenue par Martinet [12] pour l'opérateur d'Airy complexe sur la droite réelle $(D_x)^2 + ix$, $x \in \mathbb{R}$, et d'obtenir le comportement à l'infini des lignes de niveaux de la résolvante de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint. Ce dernier résultat vient compléter ceux publiés par L. Boulton [2], K. Pravda-Starov [15]. Mentionnons aussi le travail [3] de Davies et Kuijlaars qui obtiennent le premier terme dans l'asymptotique du logarithme de la norme des projecteurs spectraux pour les grandes valeurs propres pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint.

Cas modèle sur \mathbb{R} à paramètre. Nous considérons l'opérateur modèle non-autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R})$

$$P_\alpha = hD_x + g(x, \alpha) + h^2 g_*(x, \alpha; h), \quad h \in (0, 1], \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x},$$

g et g_* dépendent de manière C^∞ de x et d'un paramètre α strictement positif et borné. On pose $\tilde{g}(x, \alpha; h) := g(x, \alpha) + h^2 g_*(x, \alpha; h)$ et on demande qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} g = \mathcal{O}(x^2 + 1),$$

(cette hypothèse peut facilement être affaiblie). Pour g_* nous avons le développement asymptotique en puissances de h suivant

$$g_*(x, \alpha; h) \sim g_*^0(x, \alpha) + hg_*^1(x, \alpha) + \dots \text{ dans } C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1]). \quad (1.1)$$

L'opérateur P_α est muni du domaine $H_{sc}(\mathbb{R}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \|x^2 u\| + \|hD_x u\| < +\infty\}$. On note p_α le symbole principale semiclassique de P_α , soit $p_\alpha = \xi + g(x, \alpha)$. Rappelons que la définition du crochet de Poisson est

$$\{a, b\}(x, \xi) := (a'_\xi b'_x - a'_x b'_\xi)(x, \xi) = H_a b, \quad (1.2)$$

pour deux fonctions $a(x, \xi), b(x, \xi)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Ici $H_a = (a_\xi \partial_x - a_x \partial_\xi)$ désigne le champ Hamiltonien.

Proposition 1.1 *Soient \tilde{g} comme ci-dessus avec $g(x, \alpha) \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0, C[)$, et pour tout h fixé $g_*(x, \alpha; h) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, 1/C])$ pour un $C > 0$ donné. Nous rajoutons les hypothèses suivantes :*
pour $x \neq 0$, g satisfait $\operatorname{Im} g(x, 0) > 0$, et

$$g(0, 0) = 0, \quad g'_\alpha(0, 0) = -i, \quad (1.3)$$

$$g'_x(0, 0) = 0, \quad \operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0) > 0. \quad (1.4)$$

L'opérateur P_α est muni du domaine $H_{sc}(\mathbb{R})$. Dans ces conditions, la résolvante est définie pour tout α

$$(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (1.5)$$

et vérifie pour $h \ll \alpha^{3/2}$ et α assez petit,

$$\|P_\alpha^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0(\alpha))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_+))^{1/4} (\frac{1}{2i} \{\overline{p_\alpha}, p_\alpha\}(\rho_-))^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \quad (1.6)$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et $\rho_{\pm}(\alpha) := (x_{\pm}(\alpha), \xi_{\pm}(\alpha))$ sont les solutions de $p_{\alpha}(\rho_{\pm}) = \xi_{\pm} + g(x_{\pm}, \alpha) = 0$ avec $\mp \text{Im}'(x_{\pm}, \alpha) > 0$ (impliquant $\text{Im } g(x_{\pm}, \alpha) = 0$). ℓ_0 est donné par

$$\ell_0 := -\text{Im} \int_{x_+}^{x_-} g(y, \alpha) dy \asymp \alpha^{3/2}. \quad (1.7)$$

Nous avons pour α assez petit

$$x_{\pm}(\alpha) = \mp \alpha^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-2}{\{p_0, \frac{1}{2i}\{p_0, \overline{p_0}\}\}(0, 0)} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha), \quad (1.8)$$

impliquant

$$|\frac{1}{2}\{p_{\alpha}, \overline{p_{\alpha}}\}(\rho_{\pm})| \asymp \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Voir la section 2 pour la preuve.

Remarque 1.2 Le dénominateur du premier de 1.6 est de l'ordre de $\sqrt{h}\alpha^{1/4}$ et ce qui le rend dominant dès que $\alpha \gg h^{2/3}$.

Remarque 1.3 La proposition reste valable pour $\alpha \in [0, 1]$ si on rajoute l'hypothèse (automatiquement vérifiée pour α petit) que l'équation $\text{Im } g(x, \alpha) = 0$ admet exactement deux solutions $x = x_+(\alpha), x_-(\alpha)$ et de plus $\mp \text{Im } g'_x(x_{\pm}(\alpha), \alpha) > 0$.

Nous considérons l'opérateur d'Airy complexe sur la droite réelle $\mathcal{A} = D_x^2 + ix$, étudié par J. Martinet [12], et muni du domaine $D(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(\mathbb{R}) \mid xu \in L^2(\mathbb{R})\}$. Nous savons que le spectre est vide, que la norme de la résolvante $(\mathcal{A} - z)^{-1}$ ne dépend que de $\text{Re } z$ (voir Helffer [11]), et qu'en conjuguant par une transformée de Fourier, on peut se ramener à l'étude de l'opérateur

$$D_x - ix^2 + iz.$$

Pour z dans la zone d'intérêt $\text{Re } z > 0$, le changement de variable $x = (\text{Re } z)^{\frac{1}{2}}y$, donne l'opérateur $(\text{Re } z)\mathcal{Q}$, où \mathcal{Q} est donné par

$$\frac{1}{(\text{Re } z)^{\frac{3}{2}}} D_x - ix^2 + i - \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}.$$

De la proposition au-dessus et la remarque 1.3, avec $h = \frac{1}{(\text{Re } z)^{\frac{3}{2}}}$ et $\alpha = 1$, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.4 *Pour $\operatorname{Re} z > 0$ assez grand, la résolvante de \mathcal{A} satisfait*

$$\begin{aligned} \|((D_x)^2 + ix - z)^{-1}\| &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{Re} z)^{-\frac{1}{4}} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{3/2}})) \exp(\frac{4}{3}(\operatorname{Re} z)^{\frac{3}{2}}) \\ &\quad + \mathcal{O}(\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{1/4}}). \end{aligned}$$

Ceci précise l'estimation qu'a obtenue J. Martinet dans [12]. La preuve sera donnée à la fin de sa sous-section 2.2.

Cas général en dimension 1. Soit $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ indépendant de h , où m désigne une fonction d'ordre au sens que

$$\begin{aligned} \exists C_0 \geq 1, N_0 > 0 \text{ tels que } m(\rho) \leq C_0 \langle \rho - \mu \rangle^{N_0} m(\mu), \forall \rho, \mu \in \mathbb{R}^2, \\ \text{avec } \langle \rho - \mu \rangle = \sqrt{1 + |\rho - \mu|^2}. \end{aligned}$$

L'espace de symboles correspondant est

$$S(\mathbb{R}^2, m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^2), |\partial_\rho^\alpha a(\rho)| \leq C_\alpha m(\rho), \rho \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{N}^2\}.$$

Nous désignons par $P = p^w$ son h -quantifié de Weyl (voir par exemple [4]), que nous considérons dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous faisons une hypothèse d'ellipticité à l'infini sur P :

$$\begin{aligned} |p(x, \xi)| &\geq m(x, \xi)/C, \quad |(x, \xi)| \geq C, \\ m(x, \xi) &\rightarrow \infty, \quad (x, \xi) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pour garantir que le spectre de P n'est pas le plan complexe, nous avons besoin de supposer que

$$p(T^*\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{C}. \tag{1.10}$$

Dans ces conditions, le spectre de P est discret pour h assez petit, voir par exemple [8] ou [10].

Introduisons l'ensemble

$$\Sigma(p) = p(T^*\mathbb{R}), \tag{1.11}$$

ce dernier est automatiquement fermé à cause de (1.9). Nous allons faire une hypothèse sur un point $z_0 \in \partial\Sigma(p)$:

$$p^{-1}(z_0) = \{\rho_0\}, \quad \{p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho_0) \neq 0. \tag{1.12}$$

Ceci entraîne que $dp(\rho) \neq 0$, Nous disons aussi p est de type fini d'ordre 2 au point z_0 .

Le champ Hamiltonien $H_{\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}}$ est un champ de vecteurs réel et tangent à l'ensemble $\{\rho \mid \frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}(\rho) = 0\}$. Nous avons

$$]-T_1, T_0[\ni s \mapsto \rho(s) := \exp(sH_{\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}})(\rho_0) \subset \{\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\} = 0\}$$

est une courbe orientée. Sa courbe image par p ; $\gamma = p \circ \rho$ est une courbe C^∞ avec $\dot{\gamma} \neq 0$ et dont l'image coïncide avec $\partial\Sigma$ près de z_0 . De plus Σ se situe à gauche quand on regarde dans la direction de $\dot{\gamma}$, voir [9]. Près de z_0 , pour tout complexe $z_* \in \partial\Sigma(p)$, nous avons $p^{-1}(z_*) = \{\rho(s_*)\}$. $\gamma = p \circ \rho$ est aussi une courbe orientée. Le vecteur unitaire tangent à $\partial\Sigma$ dans un voisinage de z_0 est alors donné par $u(s) := \dot{\gamma}(s)/|\dot{\gamma}(s)|$, lequel vérifie

$$u(s) = -\frac{\{p, \frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}\}(\rho(s))}{|\{p, \frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}\}(\rho(s))|}.$$

Près de z_0 , $\Sigma(p)$ est un ensemble à bord C^∞ . Il existe un voisinage W de z_0 tel que tout $z \in \Sigma(p) \cap W$ peut s'écrire sous la forme

$$z = \gamma(s) + i\alpha u(s), \quad \alpha \geq 0, \quad z_0 = \gamma(0). \quad (1.13)$$

Proposition 1.5 *Soit P un opérateur h -pseudodifférentiel de symbole indépendant de h . Nous supposons que (p, z_0) vérifie les conditions (1.9), (1.10), (1.12). Il existe un voisinage W de z_0 tel que pour tout point z de $(\Sigma(p) \cap W) \setminus \partial\Sigma(p)$ nous avons*

$$p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\}, \quad \rho_\pm = (x_\pm, \xi_\pm), \quad (1.14)$$

avec

$$0 < \pm \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) \asymp \alpha^{1/2} \quad |\rho_+ - \rho_-| \asymp \alpha^{1/2}.$$

(le point ρ_0 se scinde en deux points ρ_+ et ρ_- lorsque l'on s'éloigne du bord de $\Sigma(p)$.)

Ici on introduit $\ell_0(z)$. Dans le cas où $p'_\xi(\rho_0) \neq 0$ nous avons la factorisation

$$p(\rho) - z = q(x, \xi, \alpha, s)(\xi + g(x, \alpha, s)) \quad (1.15)$$

où si $\alpha < 0$ alors $\text{Im } g(x) > 0, x > x_-$ ou $x < x_+$ et $\text{Im } g(x) < 0, x_- < x < x_+$. Ici $\rho_\pm(x_\pm, \xi_\pm), \xi_\pm = -g(x_\pm, \alpha, s)$. Sous ces conditions, on définit $\ell_0(z)$ comme

$$\ell_0(z) := - \int_{x_+(z)}^{x_-(z)} g(x) dx. \quad (1.16)$$

Si $p'_\xi(\rho_0) = 0$ alors $p'_x(\rho) \neq 0$. On applique la discussion précédente à $\widehat{p}(x, \xi) = p(-\xi, x)$, fonction obtenue de p par composition avec une transformation canonique. On pose alors

$$\widehat{\ell}_0(z) = - \int_{x_+}^{x_-} \widehat{g}(x, \xi) dx \quad (1.17)$$

où $\widehat{p}(\rho) - z = \widehat{q}(x, \xi, \alpha, s)(\xi + \widehat{g}(x, \alpha, s))$. On peut prouver que

Proposition 1.6 *Si $p'_\xi(\rho_0) \neq 0$ et $p'_x(\rho_0) \neq 0$, alors nous avons $\text{Im } \ell_0(z) = \text{Im } \widehat{\ell}_0(z) + \mathcal{O}(\alpha^\infty)$.*

Théorème 1.7 *Il existe une constante T_* ($< T_0, T_1$) telle que pour toutes constantes $C_0, C_1 > 0$ il existe une constante $C_2 > 0$ telle que la résolvante $(P - z)^{-1}$ est bien définie pour*

$$|s| < T_*, \quad \frac{h^{2/3}}{C_0} \leq \alpha \leq C_1(h \ln \frac{1}{h})^{2/3}, \quad h < \frac{1}{C_2}, \quad (1.18)$$

et satisfait l'estimation

$$\|(P - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im } \ell_0(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+))^{1/4} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-))^{1/4}} \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}),$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0 (qui est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0(z) := \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} \xi dx, \quad (\gamma \text{ relie } \rho_- \text{ à } \rho_+). \quad (1.19)$$

Remerciements : Mes remerciements vont d'abord à Johannes Sjöstrand pour m'avoir proposé ce sujet, et les aides et les discussions qu'il m'a apportées ainsi que pour son soutien. Je tiens aussi à remercier Bernard Helffer pour les échanges sur l'opérateur d'Airy. Ce travail a été soutenu par le Grant à Vienne sponsorisé par K. Groechenig et H.G. Feichtinger et par les grants sponsorisés l'un par V. Ivrii et l'autre par M. Sigal. Merci enfin à K. Groechenig et H.G. Feichtinger à Vienne, et V. Ivrii et M. Sigal. à Toronto pour leur accueil.

2 Modèle sur \mathbb{R} à paramètre

Nous rappelons $p_\alpha(x, \xi) := \xi + g(x, \alpha)$ désigne le symbole principal semi-classique de $P_\alpha = hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$. Notre opérateur $hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$ admet comme domaine naturel l'espace semiclassique suivant

$$H_{sc}(\mathbb{R}) := \{u \in L^2 \mid \|u\|_{H_{sc}} := \|u\| + \|x^2 u\| + \|hD_x u\| < \infty\}.$$

L'inverse, définie pour tout α

$$(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (2.1)$$

est donnée par la formule suivante

$$u(x) = \int_{+\infty}^x \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(t, \alpha; h) dt} v(y) dy.$$

En particulier, quand α est nul, nous avons (voir [5])

$$\|(hD_x + \tilde{g}(x, 0; h))^{-1}\| \leq Ch^{-2/3}, \quad (2.2)$$

2.1 Ensemble d'énergie pour de petites valeurs du paramètre

Nous cherchons à décrire l'ensemble $p_\alpha^{-1}(0)$ pour $\alpha \ll 1$ assez petit. D'abord remarquons que

$$p_0^{-1}(0) = \{(0, 0)\}.$$

Résoudre $\xi + g(x, \alpha) = 0$ revient à trouver les solutions de l'équation $\text{Im } g(x, \alpha) = 0$.

Puisque $\text{Im } g'_\alpha(0) = -1$, nous avons par la factorisation $\text{Im } g(x, \alpha) = q(x, \alpha)(\alpha - f(x))$, où $q \neq 0$ dans un voisinage de zéro, avec $f(0) = f'(0) = 0$, et $f''(0) = -\text{Im } g''_{xx}(0) \neq 0$. Par le théorème de l'inversion locale, il existe des voisinages $U_+ :=]0, b_+[$ et $U_- :=]b_-, 0[$ tels que f soit un C^1 difféomorphisme de U_+ sur $]0, f(b_+)[$ et de U_- sur $]0, f(b_-)[$. Pour avoir les solutions de l'équation $\alpha - f(x) = 0$, nous inversons simplement une fonction croissante en décroissante. Nous trouvons alors

$$\begin{aligned} x \in U_\pm, \quad \frac{2}{\text{Im } g''_{xx}(0, 0)} \alpha &= x^2 + \mathcal{O}(|x|^3), \\ &= (x + \mathcal{O}(x^2))^2. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} x \in U_\pm, \quad x + \mathcal{O}(x^2) &= \pm \alpha^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\text{Im } g''_{xx}(0, 0)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ x(\alpha) &= \pm \alpha^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\text{Im } g''_{xx}(0, 0)} \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\alpha). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nous déduisons alors le résultat suivant :

Lemme 2.1 Soit $p_\alpha = \xi + g(x, \alpha)$ le symbole principal de P_α . (1.3) et (1.4) sont vérifiés. Nous avons, pour $\alpha > 0$, assez petit,

$$p_\alpha^{-1}(0) = \{\rho_+(\alpha)\} \cup \{\rho_-(\alpha)\}, \quad \rho_\pm(\alpha) = (x_\pm, \xi_\pm),$$

avec

$$x_\pm(\alpha) = \mp \alpha^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-2}{\{p_0, \frac{1}{2i}\{p_0, \overline{p_0}\}\}(0, 0)} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha), \quad (2.4)$$

tel que

$$\pm \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_\pm(\alpha)) > 0. \quad (2.5)$$

L'ensemble $p_0^{-1}(0)$ est constitué d'un seul point $(0, 0)$ qui va se “scinder” en deux $\rho_+(\alpha)$ et $\rho_-(\alpha)$, lorsque α ne s'annule plus.

Preuve. Il faut remarquer que pour le premier crochet et le second crochet de Poisson, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_\pm) &= -\operatorname{Im} g'_x(x_\pm(\alpha), \alpha), \\ \{p_0, \frac{1}{2i}\{p_0, \overline{p_0}\}\}(0, 0) &= -\operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_\pm) &= \mp \operatorname{Im} g'_x(x_\pm(\alpha), \alpha) \\ &= \mp (x_\pm(\alpha) \operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0) + \alpha \operatorname{Im} g''_{x,\alpha}(0, 0) + \mathcal{O}(x_\pm^2 + \alpha^2)) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le premier terme de (2.6) domine car il se comporte comme $\sqrt{\alpha}$. \square

2.2 Problème de Grushin.

Nous nous appuyons sur les sections “solutions locales” et “problème de Grushin” de Hager [7] et “Énoncé et résolution asymptotique du problème de Grushin” de Hager [8]. Pour une lecture “plus aisée”, nous reprenons en détail les grandes lignes, et les calculs dont nous aurons besoin.

On suppose que $\alpha \geq \frac{1}{\mathcal{O}(1)}$ appartient à un intervalle ouvert Ω , relativement compact, séparé de l'origine par une constante indépendante de h . Nous allons d'abord considérer cette situation, puis nous laisserons α devenir petit et nous ferons des dilations pour se ramener à ce premier cas.

Avec les hypothèses choisies pour g , nous avons

$$\forall \alpha \in \Omega, p_\alpha^{-1}(0) = \{\rho_+(\alpha), \rho_-(\alpha)\} \text{ avec } \pm \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_\pm) > 0. \quad (2.7)$$

On peut trouver des intervalles J_+ et J_- disjoints tels que

$$\overline{x_\pm(\Omega)} \Subset J_\pm.$$

Considérons $\chi_\pm \in C^\infty(I_\pm)$ avec $I_+ :=]-\infty, \inf J_-[$ et $I_- :=]\sup J_+, +\infty[$. Il est clair que $I_+ \cap I_- =]\sup J_+, \inf J_-[$. On demande que $\chi_\pm = 1$ sur $\overline{J_\pm}$ tels que $\text{supp}(\chi_+) \cap \text{supp}(\chi_-) = \emptyset$. Pour le comportement de χ_\pm à l'infini, nous imposons que $\chi_+ = 1$ sur $] -\infty, \inf J_+[$ et, $\chi_- = 1$ sur $] \sup J_-, +\infty[$. Les χ_\pm s'annulent près de ∂I_\pm .

Considérons sur I_+ , une solution de l'équation $P_\alpha e_+ = 0$,

$$e_+ := c_+(\alpha; h) \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{x_+}^x \tilde{g}(y, \alpha; h) dy\right). \quad (2.8)$$

Si nous choisissons le formalisme "BKW", e_+ s'écrit

$$\begin{aligned} e_+ &= \left(c_+(\alpha; h) e^{-ih \int_{x_+}^x g_*(y, \alpha; h) dy} \right) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^x g(y, \alpha) dy}, \\ &=: a_+(x, \alpha; h) e^{\frac{i}{h} \varphi_+(x, \alpha)}, \quad \varphi_+(x, \alpha) := - \int_{x_+}^x g(y, \alpha) dy, \end{aligned}$$

avec une phase $\varphi_+ \in C^\infty$, indépendante de h , qui vérifie l'équation eikonale $\partial_x \varphi_+(x, \alpha) + g(x, \alpha) = 0$, et une amplitude a_+ admettant un développement asymptotique en puissances de h ,

$$a_+(x, \alpha; h) \sim \sum_{k \geq 0} a_{+,k}(x, \alpha) h^k \text{ dans } C_b^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall \alpha \in \Omega.$$

Nous avons $\varphi_+(x_+, \alpha) = 0$, $\varphi'_+(x_+, \alpha) = \xi_+ \in \mathbb{R}$, et

$$\text{Im } \varphi''_+(x_+(\alpha), \alpha) = -\text{Im } g'_x(x_+, \alpha) = \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\} > 0.$$

La partie imaginaire de la phase est positive, cela restera vrai globalement sur $I_+ : \text{Im } \varphi_+ \geq 0$.

Grâce au choix de g vers $-\infty$, pour $C > 0$ assez grand nous avons $\|e_+\|_{L^2([-\infty, -C])} = \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{C_h}})$. Il est alors possible, grâce au lemme de la phase stationnaire (que nous rappellerons après), de choisir $c_+(\alpha; h)$ de la forme

$$c_+(\alpha; h) \sim h^{-1/4} (c_+^0(\alpha) + h c_+^1(\alpha) + \dots) > 0,$$

avec

$$\begin{aligned} c_+^0(\alpha) &= \left(\frac{-2\operatorname{Im} g'_x(x_+(\alpha), \alpha)^{1/4}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{(-\operatorname{Im} g'_x(x_+, \alpha))^{1/4}}{\pi^{1/4}}, \end{aligned}$$

tel que e_+ soit normalisé dans L^2 sur I_+ . Ce qui implique, dans le formalisme “BKW”, que

$$\begin{aligned} a_+(x, \alpha; h) &= c_+(\alpha; h) e^{-ih \int_{x_+}^x g_*(y, \alpha; h) dy} \\ &= c_+(\alpha; h) (1 - ih \int_{x_+}^x g_*^0(y, \alpha) dy + \mathcal{O}(h^2)), \\ &= \frac{|\operatorname{Im} g'_x(x_+, \alpha)|^{1/4}}{(\pi h)^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(h)) \text{ dans } C_b^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Lemme 2.2 *On désigne par $e_+ \in H_{sc}(I_+)$ la solution normalisée dans $L^2(I_+)$ de $(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))e_+ = 0$ sur I_+ . Nous avons la représentation asymptotique suivante pour $h \ll 1$, assez petit*

$$e_+ \sim \frac{|\operatorname{Im} g'_x(x_+, \alpha)|^{1/4}}{(\pi h)^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(h)) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^x \tilde{g}(y, \alpha; h) dy}.$$

De manière analogue nous avons :

Lemme 2.3 *On désigne par $e_- \in H_{sc}(I_-)$ la solution normalisée dans $L^2(I_-)$ de $(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^* e_- = 0$ sur I_- . e_- admet la représentation asymptotique suivante pour $h \ll 1$, assez petit*

$$e_- \sim \frac{(\operatorname{Im} g'_x(x_-, \alpha))^{1/4}}{(\pi h)^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(h)) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_-}^x \overline{\tilde{g}(y, \alpha; h)} dy}.$$

Nous rappelons ici le lemme de la phase stationnaire :

Proposition 2.4 (Phase stationnaire) *Soit $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que $0 \in K = \operatorname{supp}(a)$ et*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \varphi \geq 0.$$

Supposons en plus que $\varphi'(x) \neq 0$ sur $K - \{0\}$. Posons $g(x) = \varphi(x) - \varphi''(0)x^2/2$. Alors, nous avons le développement asymptotique explicite, lorsque

$h \rightarrow 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x)/h} a(x) dx \sim \left(\frac{2\pi i h}{\varphi''(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \left(\frac{h}{2i\varphi''(0)} \right)^k \frac{1}{\ell!} \frac{1}{k!} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} ((i/h)^\ell g^\ell a)(0). \quad (2.9)$$

En particulier, nous voyons que le premier terme est $(2\pi i h)^{1/2} \varphi''(0)^{-1/2} a(0)$.

Pour une preuve on pourra consulter [19] p.36.

Proposition 2.5 *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$, le problème de Cauchy $(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))u = v$, $u(x_+) = 0$, admet la solution unique $u = \tilde{F}v$ avec*

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

Par ailleurs \tilde{F} admet un noyau intégral k vérifiant l'égalité

$$|k(x, y)| \leq \mathcal{O}(1/h) \exp(-|x - y|/(C\sqrt{h})).$$

Preuve. \tilde{F} admet le noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} 1_{\{x \leq y \leq x_+\}}. \quad (2.10)$$

Nous montrerons après qu'un tel noyau vérifie l'inégalité suivante

$$|k(x, y)| \leq \mathcal{O}(1/h) \exp(-|x - y|/(C\sqrt{h})) \quad (2.11)$$

pour une constante C donnée.

La norme L^2 de \tilde{F} est majorée (lemme de Schur) par

$$\left(\sup_x \int |k(x, y)| dy \right)^{1/2} \left(\sup_y \int |k(x, y)| dx \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Ce qui nous donne

$$\sup_{x \in I_+} \int |k(x, y)| dy \leq \frac{C}{\sqrt{h}} \text{ et } \sup_{y \in I_+} \int |k(x, y)| dx \leq \frac{C}{\sqrt{y}}. \quad (2.13)$$

Donc

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow L^2(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

De la même façon on peut montrer que

$$\|x^2 \tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow L^2(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

Ce qui implique, en utilisant $(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))\tilde{F}w = w$, que nous avons

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

Il nous reste à prouver l'estimation (2.11). Parce que x_+ est un zéro non-dégénéré de $\text{Im } g$, et au comportement de $\text{Im } g$ vers $-\infty$, nous avons pour h assez petit, et $x \in I_+$, (rappelons que $g_*(x, \alpha; h)$ est uniformément borné)

$$\text{Im } \tilde{g}(x, \alpha; h) \leq -\frac{1}{C_0}(x - x_+) + C_0 h^2 \text{ si } x \geq x_+, \quad (2.14)$$

$$\text{Im } \tilde{g}(x, \alpha; h) \geq -\frac{1}{C_1}(x - x_+) - C_1 h^2 \text{ si } x \leq x_+. \quad (2.15)$$

Ce qui implique, si nous considérons le cas $x \geq x_+$,

$$\begin{aligned} |k(x, y)| &\leq \frac{1}{h} e^{\frac{1}{h} \int_y^x \text{Im } \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} \\ &\leq \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{C_0 h} \int_y^x (\tilde{x} - x_+) d\tilde{x}} e^{C_0 h(x-y)} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} \\ &\leq \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{2C_0 h}((x-x_+)^2 - (y-x_+)^2)} e^{C_0 h(x-y)} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour $(x - x_+) \geq \sqrt{h}$, 2.16 s'écrit

$$\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{2C_0 h}((x-x_+)-2(C_0 h)^2)(x-y)} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} = \frac{1}{h} e^{-|x-y|/(C\sqrt{h})},$$

et pour $(x - x_+) \leq \sqrt{h}$,

$$\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{2C_0 h}((x-x_+)-2(C_0 h)^2)(x-y)} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} = \mathcal{O}(1/h) e^{-|x-y|/(C\sqrt{h})}.$$

Les autres inégalités nécessaires pour déduire (2.11) se calculent de la même manière. \square

Proposition 2.6 *Pour $P_\alpha = hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$, $v \in L^2(I_+)$, $v \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} P_\alpha u = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \quad (2.17)$$

avec

$$R_+ u := \langle u, \chi_+ e_+ \rangle = \int_{I_+} u(x) \chi_+(x) \overline{e_+(x)} dx,$$

admet une solution unique

$$u = Fv + F_+ v_+ \in H_{sc},$$

où

$$F_+ v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} v_+ e_+ =: \frac{1}{D_+} v_+ e_+,$$

avec

$$D_+ = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{C_h}}),$$

et nous avons

$$\|F\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} = \mathcal{O}(h^{-1/2}), \quad (2.18)$$

$$\|F\|_{\mathbb{C} \rightarrow H_{sc}} = \mathcal{O}(1). \quad (2.19)$$

Preuve. Le problème

$$\begin{cases} P_\alpha u = 0 \\ R_+ u = v_+ \end{cases}$$

admet la solution unique $u = F_+ v_+$, tandis que le problème

$$\begin{cases} P_\alpha u = v \\ R_+ u = 0 \end{cases}$$

admet la solution unique $u = Fv := (1 - F_+ R_+) \tilde{F}v$. \square

Nous désignons par $L_{comp}^2(I_-)$ et $H_{sc,comp}(I_-)$ respectivement l'ensemble des fonctions f appartenant à L^2 et à $H_{sc}(I_-)$ respectivement telles que f est nulle dans un voisinage de $\inf I_-$.

Proposition 2.7 *Pour $P_\alpha = hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$, $v \in L_{comp}^2(I_-)$ le problème*

$$P_\alpha u + R_- u_- = v,$$

avec

$$R_- u_- := u_- \chi_- e_-, \quad u_- \in \mathbb{C},$$

admet une solution unique dans $H_{sc,comp} \times \mathbb{C}$, donnée par

$$u = Gv, \quad (2.20)$$

$$u_- = G_- v := \frac{1}{\langle \chi_- e_-, e_- \rangle} \langle v, e_- \rangle =: \frac{1}{D_-} \langle v, e_- \rangle, \quad (2.21)$$

où

$$D_- = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{C_h}}),$$

avec, en tant qu'opérateur $L_{comp}^2(I_-) \rightarrow H_{sc,comp}(I_-)$:

$$\|G\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

Preuve. Pour $x \leq x_-$, nous avons l'unique solution de $P_\alpha u = \tilde{v}$, $\tilde{v} \in L_{comp}^2(I_-)$, qui est nulle près de $\inf I_-$

$$u_1(x) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy := \tilde{G}_1 \tilde{v}(x),$$

alors que pour $x \geq x_-$, nous avons

$$u_2(x) = \frac{i}{h} \int_{+\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy := \tilde{G}_2 \tilde{v}(x),$$

les deux exposants étant décroissants (à partie réelle strictement négative loin de x_-) dans le domaine d'intégration. Afin d'obtenir une solution continue, il faut imposer

$$\begin{aligned} 0 = u_1(x_-) - u_2(x_-) &= \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{h} \int_y^{x_-} \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy, \\ &= \frac{i}{h\bar{c}_-} \langle \tilde{v}, e_- \rangle. \end{aligned}$$

Donc, avec

$$u_- = G_- v,$$

nous pouvons prendre $\tilde{v} = v - R_- u_-$, car par construction

$$\langle v - R_- u_-, e_- \rangle = 0.$$

Nous avons alors la solution

$$\begin{aligned} u &= Gv = \tilde{G}(I - R_- G_-)v, \\ u_- &= G_- v, \end{aligned}$$

où \tilde{G} est donné par $\tilde{G}_{1,2}$ dans les zones correspondantes. En observant que \tilde{G} a le noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} 1_{\{y \leq x \leq x_-\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}} 1_{\{x_- \leq x \leq y\}},$$

- qui est semblable au noyau intégral de \tilde{F} - et que $\text{Im } g'_x(x_+) \sim -\text{Im } g'_x(x_-)$, nous pouvons utiliser les estimations du paragraphe précédent pour trouver que

$$\|\tilde{G}\|_{L^2(I_-) \rightarrow L^2(I_-)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}},$$

ainsi que

$$\|G\|_{L^2(I_-) \rightarrow H_{sc}(I_-)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

□

Problème de Grushin global. Nous choisissons une partition de l'unité de \mathbb{R} , $\psi_\pm \in C^\infty(I_\pm)$, $\psi_+ + \psi_- = 1$, telle que $\chi_\pm \prec \psi_\pm$, où $\psi \prec \phi$ signifie

$$\text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(1 - \phi) = \emptyset. \quad (2.22)$$

Comme les χ_\pm , les ψ_\pm s'annulent près du bord de l'intervalle I_\pm . On suit Hager [7] "Inverse global" : on commence par résoudre le problème sur I_+

$$\begin{cases} (hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))u = \psi_+ v \\ R_+ u = v_+. \end{cases}$$

Sur I_+ , on introduit

$$u_1 := (1 - \chi_-)F\psi_+ v + (1 - \chi_-)F_+ v_+.$$

Donc, en utilisant $\chi_+ \prec (1 - \chi_-)$, et $\psi_+ \prec (1 - \chi_-)$ (car $\chi_- \prec \psi_-$)

$$\begin{aligned} R_+ u_1 &= \langle u_1, \chi_+ e_+ \rangle = v_+, \\ P_\alpha u_1 &= \psi_+ v - [P_\alpha, \chi_-]F\psi_+ v - [P_\alpha, \chi_-]F_+ v_+, \end{aligned}$$

en rappelant que $P_\alpha := hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$.

Comme chez Hager [7], on peut "corriger l'erreur" sur I_- en y résolvant le problème

$$(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))u_2 + R_- u_- = \psi_- v + [P_\alpha, \chi_-]F\psi_+ v + [P_\alpha, \chi_-]F_+ v_+.$$

Nous avons la solution

$$\begin{aligned} u_2 &= G(\psi_- v + [P_\alpha, \chi_-]F\psi_+ v - [P_\alpha, \chi_-]F_+ v_+) \\ u_- &= G_-(\psi_- v + [P_\alpha, \chi_-]F\psi_+ v - [P_\alpha, \chi_-]F_+ v_+). \end{aligned}$$

Et $R_+ u_2 = 0$ car $\text{supp}(u_2) \cap \text{supp}(\chi_+) = \emptyset$.

Finalement nous obtenons :

Théorème 2.8 *Pour tout $\alpha \in \Omega$,*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h) & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc} \times \mathbb{C} \rightarrow L^2 \times \mathbb{C},$$

est inversible d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}$$

où

$$E = G \left(\psi_- + \frac{h}{i} \chi'_- F \psi_+ \right) + (1 - \chi_-) F \psi_+ \quad (2.23)$$

$$E_+ = (1 - \chi_-) F_+ + G \frac{h}{i} \chi'_- F_+$$

$$E_- = G_- (\psi_- + \frac{h}{i} \chi'_- F \psi_+)$$

$$E_{-+} = G_- \frac{h}{i} \chi'_- F_+ = -\frac{h}{i D_- D_+} \langle \chi'_- e_+, e_- \rangle.$$

Les normes vérifient

$$\|E\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}^1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right), \|E_+\| = \mathcal{O}(1), \|E_-\| = \mathcal{O}(1), \quad (2.24)$$

$$\|E_{-+}\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{h} e^{-\frac{1}{Ch}}\right). \quad (2.25)$$

Les opérateurs F, F_+, G, G_- ont été définis au-dessus. De plus E_+ et E_- sont des opérateurs de rang 1, satisfaisant

$$E_+ = \frac{1 - \chi_-}{D_+} e_+ + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (2.26)$$

$$E_- = \langle \bullet, \frac{\psi_-}{D_-} e_- \rangle + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (2.27)$$

On peut déduire une formule exacte pour E_{-+} ,

$$E_{-+} = \frac{h c_+ \overline{c_-}}{i D_+ D_-} \exp\left(\frac{i}{h} \int_{x_-}^{x_+} \tilde{g}(\tilde{x}, \alpha; h) d\tilde{x}\right). \quad (2.28)$$

Finalement, en utilisant la relation $(hD_x + \tilde{g})^{-1} = E - E_+(E_{-+})^{-1}E_-$, on trouve l'estimation suivante pour la résolvante :

Proposition 2.9 *On rappelle que $1/\mathcal{O}(1) \geq \alpha \leq \mathcal{O}(1)$ appartient à un ouvert Ω , relativement compact et séparé de l'origine par une constante indépendante de h . Pour tout α dans Ω , la résolvante vérifie pour h assez petit*

$$\begin{aligned} \|(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1}\| &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{h} \text{Im } \ell_0(\alpha)}}{h^{1/2} (\text{Im } g'_x(x_+, \alpha))^{\frac{1}{4}} (\text{Im } \bar{g}'_x(x_-, \alpha))^{\frac{1}{4}}} (1 + \mathcal{O}(h)) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où ℓ_0 vérifie

$$\ell_0 := -\text{Im} \int_{x_+}^{x_-} g(y, \alpha) dy. \quad (2.30)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que E_{-+} s'écrit

$$\begin{aligned} |E_{-+}(\alpha)| &\sim \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} (\text{Im } g'_x(x_+, \alpha) \text{Im } \bar{g}'_x(x_-, \alpha))^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{h} \text{Im} \int_{x_-}^{x_+} g(y, \alpha) dy\right) (1 + \mathcal{O}(h)), \end{aligned}$$

et que

$$\|E_- E_+\| = \left\| \frac{1 - \chi_-}{D_+} e_+ \right\| \left\| \frac{\psi_-}{D_-} e_- \right\| \sim 1 + \mathcal{O}(h^\infty).$$

□

L'opérateur d'Airy complexe sur \mathbb{R} . Considérons l'opérateur $\mathcal{A} = D_x^2 + ix$ sur la droite réelle, muni du domaine $D(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(\mathbb{R}) \mid xu \in L^2(\mathbb{R})\}$. Nous pouvons montrer que pour chaque $z \in \mathbb{C}$, la résolvante satisfait (voir Helffer [11])

$$\|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| = \|(\mathcal{A} - \text{Re } z)^{-1}\|.$$

Proposition 2.10 (J. Martinet) *Pour $\text{Re } z > 0$ assez grand, il existe deux constantes positives C_0 et C_1 telles que*

$$C_0 |\text{Re } z|^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{4}{3} (\text{Re } z)^{\frac{3}{2}} \leq \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| \leq C_1 |\text{Re } z|^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{4}{3} (\text{Re } z)^{\frac{3}{2}}.$$

nous voyons que

$$\mathcal{F}(D_x^2 + ix - z) \mathcal{F}^{-1} = i(-D_x - ix^2 + iz).$$

Après conjugaison par l'opérateur unitaire $u(x) \mapsto u(-x)$, nous notons $(\mathcal{A}_0 + iz) := D_x - ix^2 + iz$ ce nouvel opérateur. Nous avons $\|(\mathcal{A}_0 - iz)^{-1}\| = \|(\mathcal{A}_0 - i\operatorname{Re} z)^{-1}\|$. Le changement de variable $x = (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}y$, nous permet d'identifier $\mathcal{A}_0 + iz$ avec $|\operatorname{Re} z|\mathcal{Q}$, où \mathcal{Q} est donné par (y a été remplacé par x)

$$\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{3}{2}}} D_x - ix^2 + i.$$

Nous nous retrouvons alors dans la situation précédente avec $\operatorname{Im} g(x, \alpha) \leq 0$, plus explicitement \mathcal{Q} est de la forme $hD_x + \tilde{g}$ avec $\tilde{g} = g$. En reprenant les notations précédentes, nous avons

$$h = \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.31)$$

$$g(x, z) := -ix^2 + i, \quad (2.32)$$

$$x_{\pm}(z) = \pm 1 \text{ vérifiant } \operatorname{Im} g(x_{\pm}, z) = 0, \quad (2.33)$$

$$- \operatorname{Im} g'_x(x_+(z), z) = 2x_+(z) = 2, \quad (2.34)$$

$$+ \operatorname{Im} g'_x(x_-(z), z) = -2x_-(z) = 2. \quad (2.35)$$

De plus

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{x_+}^{x_-} g(x, z) dx &= -\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_1^{-1} g(x, z) dx = -(-2 + \frac{2}{3})(\operatorname{Re} z)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3}(\operatorname{Re} z)^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

et

$$h^{1/2} (\operatorname{Im} g'_x(x_+, z) \operatorname{Im} \bar{g}'_x(x_-, z))^{\frac{1}{4}} = h^{1/2} (2x_+(z))^{1/2} = 2^{1/2} (\operatorname{Re} z)^{-\frac{3}{4}}.$$

On déduit alors le corollaire 1.4.

2.3 Estimation de résolvante près du bord de l'image du symbole.

On suppose cette fois ci que $\alpha > 0$ tend vers zéro pour le cas modèle à paramètre $hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h)$ sur la ligne droite. On va se ramener au cas précédent par "scaling". Rappelons que (lemme 2.1)

$$x_{\pm}(\alpha) = \mp \alpha^{1/2} \left(\frac{-2}{\{p_0, \frac{1}{2i}\{p_0, \bar{p}_0\}\}(0, 0)} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha). \quad (2.37)$$

Le changement de variable $x = (\alpha)^{1/2}y$, nous permet d'identifier notre opérateur avec αQ où Q est donné par

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\alpha^{1/2}\alpha}D_y + \frac{g(\alpha^{1/2}y, \alpha)}{\alpha} + \frac{h^2}{\alpha^3}(\alpha^3 g_*(\alpha^{1/2}y, \alpha; h) = \\ & \tilde{h}D_y + \frac{g(\alpha^{1/2}y, \alpha)}{\alpha} + \tilde{h}^2(\alpha^3 g_*(\alpha^{1/2}y, \alpha; h)) \text{ où } \tilde{h} = h/\alpha^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

On a ainsi remplacé les points $x_+(\alpha)$ et $x_-(\alpha)$, par des points $y_+(\alpha) = \alpha^{-1/2}x_+$ et $y_-(\alpha) = \alpha^{-1/2}x_-$, où $y_{\pm} \asymp \mp 1$. Les points y_{\pm} vérifient $\text{Im } f(y_{\pm}, \alpha) = 0$, où f est défini par $f(x, \alpha) := \frac{g(\alpha^{1/2}x, \alpha)}{\alpha}$. Nous avons $\text{Im } f''_{xx}(0, 0) > 0$, et $\text{Im } f(x, \alpha) \asymp (x^2 - 1)$, Nous pouvons alors appliquer la proposition 2.9 avec $\tilde{h} := h/\alpha^{3/2}$ comme notre nouveau petit paramètre semiclassique.

Proposition 2.11 *Pour tout α , la résolvante vérifie pour $h \ll \alpha^{3/2}$ et α assez petit*

$$\begin{aligned} \|(hD_y + \tilde{g}(y, \alpha; h)^{-1}\| & \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im } \tilde{\ell}(\alpha))}{\alpha \tilde{h}^{1/2} (\text{Im } f'_y(y_+, \alpha))^{1/4} (\text{Im } \overline{f'_y(y_-, \alpha)})^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) \\ & + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha \sqrt{\tilde{h}}}\right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et $\tilde{\ell}$ vérifie

$$\tilde{\ell} := \int_{y_-}^{y_+} \frac{g(\alpha^{1/2}\tilde{y}, \alpha)}{\alpha} d\tilde{y}, \quad \text{Im } f(y_{\pm}, \alpha) = 0. \quad (2.40)$$

Rappelons que $f = \frac{g(\alpha^{1/2}y, \alpha)}{\alpha}$.

Ensuite, nous avons les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{h}} \tilde{\ell} &= \frac{\alpha^{3/2}}{h} \int_{y_-}^{y_+} \frac{g(\alpha^{1/2}\tilde{y}, \alpha)}{\alpha} d\tilde{y} = \frac{\alpha^{3/2}}{h} \int_{\alpha^{1/2}y_-}^{\alpha^{1/2}y_+} \frac{g(\tilde{y}, \alpha)}{\alpha \alpha^{1/2}} d\tilde{y} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_-}^{x_+} g(\tilde{y}, \alpha) d\tilde{y} =: \frac{1}{h} \ell_0(\alpha), \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} & \alpha \tilde{h}^{1/2} (-\text{Im } f'_y(y_+, \alpha))^{1/4} \text{Im } (f'_y(y_-, \alpha))^{1/4} \\ &= \alpha^{1/4} h^{1/2} \frac{(\text{Im } g'_x(\alpha^{1/2}y_+, \alpha))^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{1/8}} \frac{\text{Im } (\overline{g'_x(\alpha^{1/2}y_-, \alpha)})^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{1/8}} \\ &= h^{1/2} (\text{Im } g'_x(x_+, \alpha))^{\frac{1}{4}} (\text{Im } \overline{g'_x(x_-, \alpha)})^{\frac{1}{4}} \\ &= h^{1/2} \left(\frac{1}{2i} \{p_{\alpha}, \overline{p_{\alpha}}\}(\rho_+)\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2i} \{\overline{p_{\alpha}}, p_{\alpha}\}(\rho_-)\right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi donner une formule invariante pour la résolvante.

Corollaire 2.12 *Soit g satisfaisant (1.3) et (1.4). Pour tout α , la résolvante vérifie pour $h \ll \alpha^{3/2}$ avec α assez petit*

$$\|(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0(\alpha))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_+))^{1/4} (\frac{1}{2i} \{\overline{p_\alpha}, p_\alpha\}(\rho_-))^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \quad (2.41)$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0 vérifie

$$\ell_0 := \operatorname{Im} \int_{x_-}^{x_+} g(y, \alpha) dy, \quad \operatorname{Im} g(x_\pm, \alpha) = 0. \quad (2.42)$$

Remarque 2.13 *Puisque $|\alpha_\pm(\alpha)| \asymp \alpha^{\frac{1}{2}}$, nous avons les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \ell_0(\alpha) &\asymp \alpha \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{3/2}, \\ \frac{1}{2i} \{p_\alpha, \overline{p_\alpha}\}(\rho_+) &= -\operatorname{Im} g'_x(x_+, \alpha) \asymp \alpha^{1/2}, \\ \frac{1}{2i} \{\overline{p_\alpha}, p_\alpha\}(\rho_-) &= -\operatorname{Im} \bar{g}'_x(x_-, \alpha) \asymp \alpha^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc, sous la condition $h \ll \alpha^{3/2} \ll 1$ assez petit, nous avons

$$\|(hD_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1}\| \leq \frac{C}{h^{1/2} \alpha^{1/4}} e^{\frac{C \alpha^{3/2}}{h}}.$$

Nous retrouvons alors la formule usuelle donnée dans [1] et [16].

Résumons le cas où α tend vers zéro, le théorème 2.8 traite en effet du point $\alpha \geq \frac{1}{\mathcal{O}(1)}$:

Théorème 2.14 *Rappelons que $(hD_x - \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1} = E - E_+ E_{-+}^{-1} E_-$, avec*

$$|E_{-+}^{-1}| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0(\alpha))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{\xi + g, \xi + \bar{g}\}(\rho_+))^{1/4} (\frac{1}{2i} \{\xi + \bar{g}, \xi + g\}(\rho_-))^{1/4}} \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) \quad (2.43)$$

\tilde{h} , ℓ_0 seront rappelés par la suite, et $E = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}})$. E_+ et E_- sont des opérateurs de rang 1, satisfaisant

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{1 - \chi_-}{D_+} e_+ + \mathcal{O}(h^\infty), \\ E_- &= \frac{1}{D_-} \langle \bullet, \psi_- e_- \rangle + \mathcal{O}(h^\infty), \end{aligned}$$

où $D_{\pm} = 1 + \mathcal{O}(h^{\infty})$, et e_+ , e_- sont normalisés, et vérifient

$$e_+(x, \alpha; h) = \frac{(\frac{1}{2i}\{\xi + g, \xi + \bar{g}\}(\rho_+))^{\frac{1}{4}}}{(\pi h)^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^x g(y, \alpha) dy},$$

où $(\xi + g)(\rho_+) = 0$ avec $(\frac{1}{2i}\{\xi + g, \xi + \bar{g}\}(\rho_+)) > 0$. Nous avons une estimation similaire pour e_- . Donc

$$\begin{aligned} \|(hD_x - \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1}\| &\sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im } \ell_0(\alpha))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i}\{\xi + g, \xi + \bar{g}\}(\rho_+))^{\frac{1}{4}} (\frac{1}{2i}\{\xi + \bar{g}, \xi + g\}(\rho_-))^{\frac{1}{4}}} \\ &\times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \end{aligned}$$

où $\tilde{h} := h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0 (est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0 := \text{Im} \int_{x_-}^{x_+} g(x, \alpha) dx. \quad (2.44)$$

3 Cas général en dimension 1

Soit $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$, indépendant de h . On choisit un point z_0 appartenant au bord de l'image du symbole $\Sigma(p) = p(T^*\mathbb{R})$, qui est fermé grâce à la condition d'ellipticité sur p et la croissance à l'infini de la fonction d'ordre m . Nous supposons que p est de type principal en z_0 , c'est-à-dire

$$p(\rho) - z_0 = 0 \Rightarrow dp(\rho) \neq 0,$$

et que p est d'ordre 2 en z_0 .

Pour simplifier, nous supposons que $p^{-1}(z_0)$ ne contient qu'un point ρ_0 .

En nous appuyant sur Hager ([9]) : pour $z_0 \in \partial\Sigma$ nous avons $p^{-1}(z_0) = \{\rho_0\}$, avec $\{p, \bar{p}\}(\rho_0) = 0$. Soit $H_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}}$ le vecteur réel tangent à l'ensemble $\{\rho \mid \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho) = 0\}$. Donc

$$(-T_1, T_0) \ni s \mapsto \rho(s) := \exp(s H_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}})(\rho_0) \subset \{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = 0\} \quad (3.1)$$

est une courbe orientée, et $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}$ est positif à la gauche de cette courbe, et négatif à sa droite. Concernant la ligne (3.1), nous avons évidemment $\rho(0) = \rho_0$, et le sous-ensemble de \mathbb{C} , $p(\{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = 0\})$, coïncide avec $\partial\Sigma$ près de z_0 .

$p(\rho(s))$ est aussi une courbe orientée, puisque

$$\frac{\partial}{\partial s}(p(\rho(s))) = (H_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}}p)(\rho(s)) = -\{p, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}\}(\rho(s)) \neq 0.$$

De plus $d\text{Im } p \wedge d\text{Re } p = \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}d\xi \wedge dx$, donc $\rho \rightarrow p(\rho)$ préserve l'orientation à gauche de $\rho(s)$, et la renverse à droite. Ce qui veut dire, qu'au voisinage de z_0 , si $\rho(s)$ est parcouru dans le sens positif, on voit que Σ se trouve à gauche de la courbe $p(\rho(s)) \in \partial\Sigma$.

On note le chemin $p(\rho(s))$ par $\gamma :]-T_1, T_0[\rightarrow \mathbb{C}$. Un vecteur tangent à $\partial\Sigma$ est donné par $\dot{\gamma}(s)$, et nous savons que

$$\dot{\gamma}(s) = -\{p, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}\}(\rho(s)). \quad (3.2)$$

Il existe un voisinage de z_0 où tout point z appartenant à $\Sigma(p)$ s'écrit sous la forme

$$z = \gamma(s) + \alpha n(s), \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{C_0}, \quad -T_1 < s < T_0, \quad z_0 = \gamma(0), \quad (3.3)$$

pour une constante $C_0 > 0$ donnée, où $n(s)$ est le vecteur unitaire normal à la courbe $\gamma(s)$, orienté vers l'intérieur de $\Sigma(p)$. $n(s)$ vérifie les relations $n(s) = i \frac{\dot{\gamma}(s)}{|\dot{\gamma}(s)|}$, et $|n(s)| = 1$. Par la suite le vecteur unitaire tangent à $\gamma(s)$ sera noté $u(s)$, $u(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{|\dot{\gamma}(s)|}$ et $|u(s)| = 1$.

Puisque p est de type fini d'ordre 2 au point z_0 , nous pouvons alors supposer sans perte de généralité que $p'_\xi(\rho_0) \neq 0$ et que $p'_x(\rho_0) = 0$. Nous avons dans de nouvelles coordonnées (x, ξ) centrées en $\rho(s)$ - changement de coordonnées symplectiques dépendant explicitement de s , conjugaison par un opérateur intégral de Fourier de plus le gradient de p en $(0, 0)$ est un multiple d'un vecteur réel -

$$\begin{aligned} p(\rho, s) - \gamma(s) &= p(\rho, s) - p(\rho(s)) \\ &= u(s) \left(\frac{p'_\xi(0, 0, s)}{u(s)} \xi + \omega(x, \xi, s) \right), \text{ avec } \omega = \mathcal{O}(x^2 + \xi^2), \end{aligned}$$

où ω est C^∞ en s . N'oublions pas que p va dépendre de s car les nouvelles coordonnées dépendent de s . Aussi $p'_\xi(0, 0, s)/u(s)$ est réel. Puis, grâce au théorème de factorisation de Malgrange pour des fonctions C^∞ , il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times]-T_1, T_0[$ contenant le point $(0, 0, 0, 0)$ tel que dans V , nous avons la factorisation

$$\begin{aligned} p(\rho, s) - z &= p(\rho, s) - \gamma(s) - i\alpha u(s) \\ &= u(s) \left(\frac{p'_\xi(0, 0, s)}{u(s)} \xi + \omega(x, \xi, s) - i\alpha \right) \\ &= u(s) q(x, \xi, \alpha, s) (\xi + g(x, \alpha, s)), \quad q(x, \xi, \alpha, s) \neq 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où g et q sont des fonctions C^∞ , g s'annulant au point $(0, 0, 0)$. De plus pour $x = \xi = 0$, $\alpha = 0$ et s non nul, nous avons $p(0, s) - z = p(0) - \gamma(s) = 0$, impliquant $g(0, 0, s) = 0$. Par commodité, nous supprimons la variable s . Pour $x = \xi = 0$, $\alpha = 0$, nous avons alors

$$g(0, 0) = 0, \quad (3.5)$$

$$q(0, 0, 0) = \frac{p'_\xi(0, 0)}{u(s)}, \quad (3.6)$$

$$g'_\alpha(0, 0) = -i \frac{u(s)}{p'_\xi(0, 0)}, \quad (3.7)$$

$$g'_x(0, 0) = 0. \quad (3.8)$$

Comme $p'_x(\rho_0)$ est nul, le rapport $\frac{p'_\xi(0, 0)}{u(s)}$ est réel et non nul, et sera noté a ; $a := \frac{p'_\xi(0, 0)}{u(s)} = q(0, 0, 0)$. Puisque

$$\omega''_{xx}(0, 0) = q''_{xx}(0, 0, 0) \cdot 0 + 2q'_x(0, 0, 0) \cdot 0 + q(0, 0, 0)g''_{xx}(0, 0),$$

nous avons aussi,

$$ag''_{xx}(0, 0) = \omega''_{xx}(0, 0). \quad (3.9)$$

Nous avons alors - rappelons que c'est pour $\alpha = 0$ -

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(x, \xi) &= \frac{|u(s)|^2}{2i} \{a\xi + \omega, a\xi + \bar{\omega}\}(x, \xi) \\ &= \frac{1}{2i} (a\bar{\omega}'_x - a\omega'_x) \\ &= -a \operatorname{Im} \omega'_x(x, \xi), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \{p, \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}\}(0, 0) &= u(s) \{a\xi + \omega, -\operatorname{Im} a\omega'_x\}(0, 0) \\ &= -u(s)a^2 \operatorname{Im} \omega''_{xx}(0, 0) \\ &= -u(s)a^2 a \operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

On déduit alors que

$$\operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0) \neq 0, \quad (3.11)$$

et que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0) &= \frac{\dot{\gamma}(s)}{u(s)a^2a} = \frac{\dot{\gamma}(s)^3}{|\dot{\gamma}(s)|^3} \frac{|\dot{\gamma}(s)|}{p'_\xi(0, 0)^3} \\ &= \frac{\{p, \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}\}(0, 0)^2}{|\{p, \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}\}(0, 0)|^2} \frac{\{p, \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}\}(0, 0)}{p'_\xi(0, 0)^3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De l'équation (2.3) qui donne le comportement de $x_{\pm}(\alpha)$ dans le cas modèle $hD_x + g(x, \alpha)$ avec l'hypothèse que $g'_\alpha(0, 0) = -i$, nous obtenons qu'il existe un voisinage de z_0 pour lequel nous avons pour tout complexe z appartenant à $\Sigma(p)$

$$z \notin \partial\Sigma(p), \quad p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\}, \quad \rho := (x, \xi), \quad (3.13)$$

où

$$x_{\pm}(z) = x_0 \mp \epsilon(\alpha |g'_\alpha(0, 0, s)|)^{1/2} \left(\frac{2}{|\operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0, s)|} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha),$$

ϵ est le signe de $g'_\alpha(0, 0, s) \operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0, s)$. En remplaçant $g'_\alpha(0, 0, s)$ et $\operatorname{Im} g''_{xx}(0, 0, s)$ par leur expression respective (3.7) et (3.12), nous obtenons

$$x_{\pm}(z) = x_0 \mp \epsilon \alpha^{1/2} |p'_\xi(\rho(s))| \left(\frac{2}{|\{p, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}\}(\rho(s))|} \right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha), \quad (3.14)$$

$$z = \gamma(s) + \alpha n(s), \quad \alpha > 0,$$

où ϵ est le signe de $\{p, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}\}(\rho(s))/p'_\xi(\rho(s))$. Nous avons que

$$\pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) > 0. \quad (3.15)$$

On prolonge g sur \mathbb{R} de la même manière que dans le cas modèle à paramètre.

On distingue, maintenant, deux cas :

- 1er cas, $p^{-1}(z_0)$ ne contient qu'un point $\{\rho_0\}$,
- 2ème cas, $p^{-1}(z_0)$ ne contient que deux points $\{\rho_1, \rho_2\}$.

3.1 Estimation de résolvante : cas 1

Proposition 3.1 *Il existe deux fonctions*

$$\tilde{q} \sim \sum_{k \geq 0} \tilde{q}_k h^k \in S_{cl}(\operatorname{Vois}(0, 0), 1), \quad (3.16)$$

$$\tilde{g} \sim \sum_{k \geq 0} \tilde{g}_k h^k, \quad g_k \in C^\infty(\pi_x(\operatorname{Vois}(0, 0))), \quad (3.17)$$

telles que - nos coordonnées (x, ξ) sont centrées en $\rho(s)$ -

$$p(x, \xi) - z \sim \tilde{q}(x, \xi, \alpha, s; h) \# (\xi + \tilde{g}(x, \alpha, s; h)) \# \tilde{q}(x, \xi, \alpha, s; h), \quad (3.18)$$

dans $S(\operatorname{Vois}(0, 0), m)$ uniformément en z (z dépend de s et α), où z appartient à un voisinage de z_0 . Si l'on tient compte de la factorisation $(p - z) = n(s)q(x, \xi)(\xi + g(x))$, nous pouvons choisir \tilde{q}_0 égal à $(n(s)q(x, \xi))^{1/2}$ impliquant que $\tilde{g}_1 = 0$.

Pour la suite, par souci de clarté, nous supprimons la dépendance en α et s .
Preuve. Avec $p(\rho(z)) - z = 0$, $p'_\xi(\rho(z)) \neq 0$ nous obtenons un voisinage V de $\rho(z_0)$ des fonctions lisses \tilde{q}_0 et \tilde{g}_0 définies respectivement sur V et $\pi_x(V)$ telles que

$$(p - z) = (n(s)q(x, \xi))^{1/2}(\xi + \tilde{g}_0(x))(n(s)q(x, \xi))^{1/2}$$

avec $\tilde{q}_0(x(z_0), \xi(z_0)) \neq 0$, $\tilde{g}_0(x(z_0)) = -\xi(z_0)$. On peut rajouter z aux variables et nous avons toujours une dépendance C^∞ de z , et les équations ci-dessus restent valables dans un voisinage de z_0 . Nous regroupons par ordre de h les termes de la forme de composition asymptotique :

$$\begin{aligned} 0 = & \tilde{q}_0^2(x, \xi)\tilde{g}_N(x) + 2\tilde{q}_0(x, \xi)\tilde{q}_N(x, \xi)(\xi + \tilde{g}_0(x)) \\ & + \tilde{G}_N(\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_{N-1}, \tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_{N-1}, x, \xi, z). \end{aligned}$$

Etant donné que \tilde{q}_0 est non nul, nous avons une équation de la forme

$$G_N = 2\frac{\tilde{q}_N}{\tilde{q}_0}(\xi + \tilde{q}_0(x)) + \tilde{g}_N(x)$$

où G_N ne dépend que de $\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_{N-1}, \tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_{N-1}$. Il est possible de déterminer \tilde{g}_N et \tilde{q}_N inductivement (voir [8]), puisque le théorème de Malgrange nous prouve l'existence d'un voisinage de $\rho(z_0)$ et les fonctions \tilde{g}_N et \tilde{q}_N avec les propriétés demandées. En itérant, nous obtenons les séries formelles \tilde{g} et \tilde{q} .

Pour le dernier point de la proposition, il suffit de remarquer que le terme en h d'une composition de Weyl symétrique s'annule. \square

Nos variables $\rho = (x, \xi)$ sont centrées en $\rho(s) := (x(s), \xi(s))$; si nous introduisons l'opérateur unitaire T_s par

$$T_s u(y) := e^{iy\xi(s)/h} u(y - x(s)),$$

nous trouvons que l'opérateur $\tilde{P} := T_s P T_s^{-1}$ satisfait

$$\tilde{P} = \text{Op}_h^w(\tilde{p}) \text{ où } \tilde{p}(\rho) = p(\rho - \rho(s)).$$

Il existe alors un symbole \tilde{q} pour les variables (x, ξ) , α et s , vérifiant $\tilde{q} = \chi(x, \xi)q(x, \xi, \alpha, s)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h)$, où $\chi = C_0^\infty(\pi_{x, \xi}(V))$ est une troncature à support compact indépendant de z (donc de α et s) valant 1 dans un petit voisinage V de $(0, 0)$, tel que

$$\begin{aligned} (\tilde{q})^w T_s (P - z) T_s^{-1} (\tilde{q})^w = & n(s)(hD_x + g(x, \alpha, s) + h^2 g_*(x, \alpha, s; h)) \\ & \text{microlocalement près de } (0, 0), \end{aligned} \quad (3.19)$$

(remarque de J. Sjöstrand, pour y arriver, il semblerait qu'il faut aussi une rotation symplectique) uniformément pour z (qui est une fonction de α et s , voir (3.3)) dans un voisinage donné de z_0 ,

$$g_*(x, \alpha, s; h) \sim g_*^0(x, \alpha, s) + hg_*^1(x, \alpha, s) + \dots \text{ dans } C_0^\infty, \\ \text{uniformément en } \alpha \text{ et } s.$$

Par souci de clarté, la variable s est supprimée. On notera

$$\tilde{g}(x, \alpha; h) := g(x, \alpha) + h^2 g_*(x, \alpha; h).$$

Nous pouvons trouver une partition de l'unité de \mathbb{R}^2 , $\chi_j \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, $j = 0, 1$ telle que (voir Faure-Sjöstrand par exemple)

$$\chi_j \geq 0, \chi_0^2 + \chi_1^2 = 1, \text{ avec } \chi_0 \in C_0^\infty(\text{Vois}(\rho_0)), \chi_1 \in C_b^\infty.$$

Nous avons

$$\|u\|^2 = \|\chi_1 u\|^2 + \|\chi_0 u\|^2.$$

En utilisant l'ellipticité de $(P - z)^{-1}$ on peut montrer que pour $|\alpha| = \mathcal{O}(h \ln(\frac{1}{h})^{2/3})$

$$\|(P - z)^{-1} v\|^2 \leq M_0^2 \|\chi_0 v\|^2 + \mathcal{O}(1) \|\chi_1 v\|^2 + \mathcal{O}(h) \|v\|^2, \quad (3.20)$$

où $M_0 = \|(P - z)^{-1} \chi_0\|$. Ce qui veut dire que si $M := \max(M_0, \mathcal{O}(1))$ alors

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq (M^2 + \mathcal{O}(h))^{\frac{1}{2}}.$$

Nous souhaitons maintenant connaître le comportement de M_0 ,

$$M_0 = \|(n(s))^{-1} T_s^{-1} \tilde{q}^w (h D_x + \tilde{g}(x, \alpha; h))^{-1} \tilde{q}^w T_s \chi_0\|.$$

Du théorème 2.14 et du fait que E_{-+} est scalaire et T_s est unitaire, nous avons que

$$M_0 = |E_{-+}^{-1}| \times \|\tilde{q}^w E_+ E_- \tilde{q}^w\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}\right),$$

et nous obtenons une expression pour $\tilde{q}^w E_+ E_- \tilde{q}^w$, en fonction des quasi-modes :

$$\tilde{q}^w E_+ E_- \tilde{q}^w = \frac{1 - \chi_-}{D_- D_+} (\tilde{q}^w e_+) \langle \bullet, ((\tilde{q})^*)^w \psi_{-e_-} \rangle + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (3.21)$$

Nous avons besoin d'un théorème de Melin, Sjöstrand sur l'action d'un opérateur pseudodifférentiel sur une fonction BKW avec phase complexe. Dès lors, puisque e_+ et e_- sont des fonctions BKW normalisées, et microlocalisées près de ρ_\pm , nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.2 *Nous avons la formule*

$$\|\tilde{q}^w E_+ E_- \tilde{q}^w\| \sim \frac{1}{|q(\rho_+)|^{\frac{1}{2}} |q(\rho_-)|^{\frac{1}{2}}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})). \quad (3.22)$$

Nous utilisons maintenant l'expression (2.43) de E_{-+} . Puisque $(p - z) = n(s)q(\xi + g)$, avec $|n(s)| = 1$ nous obtenons que

$$\frac{1}{|q(\rho_+)|^{\frac{1}{2}}} \times \left(\frac{1}{2i} \{\xi + g, \xi + \bar{g}\}(\rho_+)\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+)\right)^{\frac{1}{4}},$$

et similairement pour ρ_- . Nous avons donc, pour tout $h \ll \alpha^{3/2} \ll 1$, assez petit

$$M_0 = \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im } \ell_0(\alpha))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+))^{\frac{1}{4}} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-))^{\frac{1}{4}}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}\right), \quad (3.23)$$

où $\tilde{h} := h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0 (qui est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0(\alpha) := \text{Im} \int_{x_-}^{x_+} \text{Im } g(x, \alpha, s) dx \quad (3.24)$$

(remarquons l'ajout de s qui est important pour la suite). $\ell_0(\alpha) = \ell_0(z)$ s'écrit aussi sous la forme

$$\begin{aligned} \ell_0(z) &= \text{Im} \int_{x_-(z)}^{x_+(z)} \varphi(x, z) dx, \quad p(x, \varphi(x, z)) - z = 0, \\ &= \text{Im} \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} \xi dx, \quad (\gamma \text{ relie } \rho_- \text{ à } \rho_+), \\ &= \text{Im} \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} x d\xi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour que M_0 ait que croissance tempérée en h^{-1} , il faut que

$$(\alpha^{3/2} \asymp) \quad \text{Im} \int_{x_-}^{x_+} g(y, z) dy \leq C h \ln \frac{1}{h},$$

pour un $C > 0$ quelconque. Soit si

$$\alpha \leq \mathcal{O}(1) \left(h \ln \frac{1}{h} \right)^{2/3}. \quad (3.26)$$

On déduit alors le résultat suivant :

Théorème 3.3 *Soit P un opérateur h -pseudodifférentiel de symbole indépendant de h . On suppose que (p, z_0) vérifie les conditions (1.9), (1.10), (1.12). Un vecteur tangent à $\partial\Sigma(p)$ dans un voisinage de z_0 est donné par $\dot{\gamma}(s)$. Donc tout point z de $\Sigma(p)$ appartenant à un voisinage de z_0 peut s'écrire sous la forme*

$$z = \gamma(s) + \alpha n(s), \quad -T_1 < s < T_0, \quad \alpha \geq 0, \quad z_0 = \gamma(0), \quad (3.27)$$

où $n(s) = i\dot{\gamma}(s)/|\dot{\gamma}(s)|$. Il existe un voisinage de z_0 , pour lequel tout point de z à l'intérieur de $\Sigma(p)$ vérifie

$$z \notin \partial\Sigma, \quad p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\}, \quad \rho_{\pm} = (x_{\pm}, \xi_{\pm}), \quad (3.28)$$

avec

$$\pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) > 0.$$

Il existe une constante T_* ($< T_0, T_1$) telle que pour toutes constantes $C_0, C_1 > 0$, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que la résolvante $(P - z)^{-1}$ est bien définie pour

$$|s| < T_*, \quad \frac{h^{2/3}}{C_0} \leq \alpha \leq C_1 (h \ln \frac{1}{h})^{2/3}, \quad h < \frac{1}{C_2}, \quad (3.29)$$

et satisfait l'estimation

$$\|(P - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+))^{1/4} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-))^{1/4}} \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}),$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0 (qui est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0(z) := \operatorname{Im} \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} \xi dx, \quad (\gamma \text{ relie } \rho_- \text{ à } \rho_+). \quad (3.30)$$

Dans le cas des opérateurs à coefficients analytiques, on peut pousser α jusqu'à une petite constante.

3.2 Estimation de résolvante : cas 2

Théorème 3.4 *Soit P un opérateur h -pseudodifférentiel de symbole indépendant de h . On demande que pour tout z dans l'intérieur de Σ , $p^{-1}(z)$ soit fini et que $\{p, \bar{p}\}(\rho) \neq 0$ pour $\rho \in p^{-1}(z)$.*

On suppose que p vérifie les conditions (1.9), (1.10), et que l'hypothèse (1.12) soit remplacée par

$$\begin{aligned} p^{-1}(z_0) &= \{\rho_1, \rho_2\}, \quad \rho_j = (x_j, \xi_j), \\ \{p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho_1) &\neq 0, \\ \{p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho_2) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

$\Sigma(p)$ sera l'union de deux domaines Σ_1, Σ_2 à bord C^∞ près de z_0 dont les bords peuvent ne pas coïncider, $\Sigma_j = p(\text{vois}(\rho_j))$.

Soit $H_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}}$ le vecteur réel tangent à l'ensemble $\{\rho \mid \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho) = 0\}$.
Donc

$$(-T_1, T_0) \ni s \mapsto \rho_j(s) := \exp(sH_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}})(\rho_j) \subset \{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = 0\}$$

est une courbe orientée. Près de z_0 , pour tout $z_* \in \partial\Sigma(p)$, nous avons $p^{-1}(z) = \{\rho_1(s_*), \rho_2(t_*)\}$. $p(\rho_j(s))$ est aussi une courbe orientée notée $\gamma_j(s) := p(\rho_j(s))$. Le vecteur tangent à $\partial\Sigma$ dans un voisinage de z_0 est donné par $\dot{\gamma}_1(s)$ ou par $\dot{\gamma}_2(t)$. Il existe donc un voisinage de z_0 tel que tout point z de $\Sigma(p)$ se met sous la forme :

$$z = \gamma_1(s) + \alpha_1 n_1(s), \quad -T_1 < s < T_0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad z_0 = \gamma_1(0), \quad (3.32)$$

$$z = \gamma_2(s) + \alpha_2 n_2(s), \quad -T_1 < s < T_0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad z_0 = \gamma_2(0), \quad (3.33)$$

$n_1 = i\dot{\gamma}_2(s)/|\dot{\gamma}_1(s)|$ et $n_2 = i\dot{\gamma}_1(s)/|\dot{\gamma}_2(s)|$. Alors pour tout point z de Σ dans un voisinage de z_0 , nous avons

$$z \notin \partial\Sigma, \quad p^{-1}(z) = \{\rho_+^1(z), \rho_-^1(z), \rho_+^2(z), \rho_-^2(z)\},$$

où

$$\pm \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm^j) > 0.$$

Il existe une constante T_* ($< T_0, T_1$) telle que pour toutes constantes $C_0, C_1 > 0$ il existe une constante $C_2 > 0$ telle que la résolvante $(P - z)^{-1}$ est bien définie pour

$$|s| < T_*, \quad \frac{h^{2/3}}{C_0} \leq \alpha \leq C_1(h \ln \frac{1}{h})^{2/3}, \quad h < \frac{1}{C_2}, \quad \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.34)$$

et satisfait l'estimation pour $z \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\begin{aligned} \|(P - z)^{-1}\| &\sim \sup_{i=1,2} \left(\frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im} \ell_0^i(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_+^i))^{1/4} (\frac{1}{2i}\{\bar{p}, p\}(\rho_-^i))^{1/4}} \right) \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}\right), \end{aligned}$$

pour $z \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2^c$:

$$\begin{aligned} \|(P - z)^{-1}\| &\sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0^1(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+^1))^{\frac{1}{4}} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-^1))^{\frac{1}{4}}} \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) \\ &\quad + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \end{aligned}$$

pour $z \in \Sigma_1^c \cap \Sigma_2$:

$$\begin{aligned} \|(P - z)^{-1}\| &\sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \ell_0^2(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+^2))^{\frac{1}{4}} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-^2))^{\frac{1}{4}}} \times (1 + \mathcal{O}(\tilde{h})) \\ &\quad + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \end{aligned}$$

où $\tilde{h} = h/\alpha^{3/2}$, et ℓ_0^i (qui est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0^i(z) := \operatorname{Im} \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} \xi dx, (\gamma \text{ relie } \rho_-^i \text{ à } \rho_+^i). \quad (3.35)$$

Preuve. Fort du cas 1, nous pouvons donner les grandes lignes de la preuve. Comme précédemment notre raisonnement donne donc deux opérateurs T_s et T_s^{-1} tels que

$$\begin{aligned} \tilde{q}^w T_s(P - z) T_s^{-1} \tilde{q}^w &= n_1(s)(hD_x + \tilde{g}_1(x, \alpha; h)) \\ &\quad \text{microlocalement près de } (0, 0), \quad (3.36) \\ \tilde{g}_1 &= g_1(x, \alpha) + h^2 g_{*,1}(x, \alpha; h), \end{aligned}$$

De même pour ρ_2 . Soient V_1, V_2 des voisinages arbitrairement petits près de ρ_1, ρ_2 . Il existe $\theta_j \in C_0^\infty(V_j)$ tels que si

$$p_0 = p + \sum_j \theta_j$$

alors $p_0^{-1}(z_0)$ est vide. Soit $p_j = p + \sum_{k, k \neq j} \theta_k$. Donc $p_j^{-1}(z_0) = \{\rho_j\}$. Soit $P_0 = p_0^w(x, hD_x)$ et $P_j = p_j^w(x, hD_x)$. P_0 est uniformément elliptique. On suppose que $\theta_0 = 1$ près de ρ_0 . Nous écrivons

$$R_0(z) := \sum_j (P_j - z)^{-1} \theta_j + (P_0 - z)^{-1} (1 - \sum_j \theta_j)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (P - z)R_0(z) &= 1 + \sum_j (P - P_j)(P_j - z)^{-1} \theta_j \\ &\quad + (P + P_0)(P_0 - z)^{-1} (1 - \sum_j \theta_j), \end{aligned}$$

où $(P - P_j)(P_j - z)^{-1}\theta_j = \mathcal{O}(h^\infty)$, (voir [8]) et aussi pour le dernier terme. Donc $(P - z) = R_0(z)(1 + K)^{-1}$ où $K = \mathcal{O}(h^\infty)$.

Nous pouvons trouver une partition de l'unité de \mathbb{R}^2 , $\chi_j \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, $j = 0, 1, 2$ telle que

$$\chi_j \geq 0, \chi_0^2 + \dots + \chi_2^2 = 1, \text{ avec } \chi_j \prec \theta_j, \chi_0 \in C_b^\infty.$$

Nous avons

$$\|u\|^2 = \sum_{j=0}^2 \|\chi_j u\|^2.$$

On peut alors montrer que

$$\|(P - z)^{-1}v\|^2 \leq \sum_{j=1}^2 M_j^2 \|\chi_j v\|^2 + \mathcal{O}(1) \|\chi_0 v\|^2 + \mathcal{O}(h) \|v\|^2, \quad (3.37)$$

où $M_j = \|(P_j - z)^{-1}\chi_j\|$. Ce qui veut dire que si $M := \max(M_j, \mathcal{O}(1))$ alors

$$\|(p - z)^{-1}\| \leq (M^2 + \mathcal{O}(h))^{\frac{1}{2}}.$$

Nous souhaitons maintenant connaître le comportement de M_j qui est aussi donné par l'expression,

$$\begin{aligned} M_1 &= \|(n_1(s))^{-1}T_s^{-1}\tilde{q}_1^w(hD_x + \tilde{g}_1(x, \alpha_1; h))^{-1}\tilde{q}_1^w T_s \chi_1\|, \\ M_2 &= \|(n_2(s))^{-1}S_s^{-1}\tilde{q}_2^w(hD_x + \tilde{g}_2(x, \alpha_2; h))^{-1}\tilde{q}_2^w S_s \chi_2\|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

S_t a un comportement similaire à T_s .

De la section précédente, M_j , $j = 1, 2$ satisfait

$$M_j \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{1}{h} \text{Im } \ell_0^j(z))}{h^{1/2} (\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+^j))^{\frac{1}{4}} (\frac{1}{2i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-^j))^{\frac{1}{4}}} (1 + \mathcal{O}(\tilde{h}_j)) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}), \quad (3.39)$$

où $\tilde{h}_j = h/\alpha_j^{3/2}$, et ℓ_0^j (qui est une intégrale d'action) vérifie

$$\ell_0^j(z) := \text{Im} \int_{\gamma \subset p^{-1}(z)} \xi dx, (\gamma \text{ relie } \rho_-^j \text{ à } \rho_+^j). \quad (3.40)$$

□

4 Exemples

Dans ce qui précède, le paramètre α représentait la distance du point z à la frontière du pseudospectre. Dans ce qui suit, pour les exemples, la frontière ne sera représentée que par des morceaux de l'axe réel ou imaginaire. Donc la partie réelle ou imaginaire de z sera notre distance à la frontière, soit notre paramètre α . On préfère ici changer et utiliser la lettre y à la place de α .

4.1 Cas 1 : L'opérateur cubique non-autoadjoint

On considère l'opérateur non-autoadjoint sur la droite réelle

$$\mathcal{P} = (D_x)^2 + ix^3.$$

L'image du symbole principal est le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq 0$. Le spectre est composé de valeurs propres discrètes situées sur l'axe réel positif (voir Trepheten, Embree [18]). Le pseudospectre est symétrique par rapport à l'axe réel. Pour étudier les courbes de niveaux de la résolvante, il suffit donc de considérer celles situées au-dessus de l'axe réel. p désigne le symbole de \mathcal{P} .

Pour z au dessus de l'axe réel et appartenant à $\partial\Sigma(p) = i\mathbb{R}$, nous avons $p^{-1}(z) = \{\rho\} = \{(\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{3}}, 0\}$ et

$$\{p, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}\}(\rho) = -2 \times 3^2(|\operatorname{Im} z|)^{4/3} \neq 0.$$

Nous sommes donc dans le cas 1.

Pour tout z appartenant à l'intérieur de $\Sigma(p)$, nous avons

$$p^{-1}(z) = \{\rho_+, \rho_-\},$$

où

$$\rho_{\pm}(z) = ((\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{3}}, \mp(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}),$$

et

$$\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) = (\operatorname{Im} p_{\xi} \bar{p}_x)(\rho_{\pm}) = -2 \times 3\xi x^2.$$

Le changement de variable $x = (\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{3}}\tilde{x}$, nous permet d'identifier $(\mathcal{P} - z)$ à $(\operatorname{Im} z)\tilde{\mathcal{P}}$ où $\tilde{\mathcal{P}}$ s'écrit

$$\left(\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^{\frac{5}{6}}}D_x\right)^2 + ix^3 - \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} - i, \text{ avec } h := \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^{\frac{5}{6}}}, y := \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}. \quad (4.1)$$

h est notre paramètre semiclassique et y est choisi petit. On choisit $y > 0$, puisque l'on se restreint aux courbes situées au dessus de l'axe réel. Soit $\varphi(\xi)$ la fonction qui vérifie

$$\xi^2 + i\varphi(\xi)^3 - y - i = 0.$$

Nous avons

$$\int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} \varphi d\xi = \int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} (1 - iy + i\xi^2)^{\frac{1}{3}} d\xi$$

Puisque y est petit, un développement limité donne

$$\operatorname{Im} \int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} (1 - iy + i\xi^2)^{\frac{1}{3}} d\xi = \frac{4}{9}y^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(y^{5/2}).$$

Ensuite, remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_+(y+i)) &= \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(1, -y^{1/2}) \\ &= (-3x^2\xi - 3x^2\xi)(1, -y^{1/2}) = 6\sqrt{y}, \end{aligned}$$

il en découle que

$$\frac{1}{2i}\{\bar{p}, p\}(\rho_-(y+i)) = 6\sqrt{y}.$$

Proposition 4.1 *Pour $\operatorname{Im} z \gg 1$ et $y := \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, $h := \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^{\frac{5}{6}}}$, tels que*

$$h \ll y^{3/2} \ll \mathcal{O}(h \ln \frac{1}{h}) \text{ soit, } (\operatorname{Im} z)^{4/9} \ll \operatorname{Re} z \ll \operatorname{Im} z,$$

nous avons de manière précise,

$$\|(\mathcal{P} - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} (1 - iy + ix^2)^{\frac{1}{3}} dx\right)}{6^{1/2} (\operatorname{Im} z)^{1/3} (\operatorname{Re} z)^{1/4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{4}} (\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{3}}}\right),$$

ou bien, sous une forme simplifiée

$$\|(\mathcal{P} - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{4}{9} \frac{(\operatorname{Re} z)^{3/2}}{(\operatorname{Im} z)^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Re} z)^{5/2}}{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}\right)\right)}{6^{1/2} (\operatorname{Im} z)^{1/3} (\operatorname{Re} z)^{1/4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{4}} (\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{3}}}\right). \quad (4.2)$$

Lignes de niveaux de la résolvante. On se sert de l'expression (4.2),

$$\frac{1}{\epsilon} = \|(\mathcal{P} - z)^{-1}\| = (4.2).$$

On obtient alors

$$-\ln \epsilon = \frac{4}{9} \frac{(\operatorname{Re} z)^{3/2}}{(\operatorname{Im} z)^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Re} z)^{5/2}}{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}\right) + \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{6^{1/2}} \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{1/4} (\operatorname{Im} z)^{1/3}} \right). \quad (4.3)$$

(4.3) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} (\operatorname{Im} z)^{4/9} \left(\ln \left(\frac{6^{1/2} (\operatorname{Re} z)^{1/4} (\operatorname{Im} z)^{1/3}}{\sqrt{\pi} \epsilon} \right) \right)^{2/3} + \mathcal{O} \left(\frac{(\operatorname{Re} z)^{5/3}}{(\operatorname{Im} z)^{2/3}} \right) \\ &= \left(\frac{9}{16}\right)^{2/3} (\operatorname{Im} z)^{4/9} \left(\ln (\operatorname{Re} z (\operatorname{Im} z)^{4/3}) \right)^{2/3} + \mathcal{O}((\operatorname{Im} z)^{4/9}) \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\frac{(\operatorname{Re} z)^{5/3}}{(\operatorname{Im} z)^{2/3}} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \left(\frac{9}{16}\right)^{2/3} (\operatorname{Im} z)^{4/9} \left(\ln (\operatorname{Im} z)^{16/9} \left(\ln ((\operatorname{Re} z) (\operatorname{Im} z)^{4/3}) \right)^{2/3} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((\operatorname{Im} z)^{4/9}) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Puisque $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ et que $\ln(t \ln t) = (1 + o(1)) \ln t$, on obtient

$$\operatorname{Re} z = (1 + o(1)) \left(\frac{9 \cdot 16}{16 \cdot 9} \right)^{2/3} (\operatorname{Im} z)^{4/9} (\ln \operatorname{Im} z)^{2/3}. \quad (4.6)$$

Résumons :

Proposition 4.2 *La partie des lignes de niveaux de l'opérateur non-autoadjoint \mathcal{P} se situant en dessous de l'axe réel, admet la représentation asymptotique suivante lorsque $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$*

$$\operatorname{Re} z = (1 + o(1)) (\operatorname{Im} z)^{4/9} (\ln \operatorname{Im} z)^{2/3}.$$

De manière plus précise, si l'on considère la ligne de niveaux $\frac{1}{\epsilon} = \|(\mathcal{P} - z)^{-1}\|$ alors nous avons

$$\operatorname{Re} z = (1 + o(1)) \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} (\operatorname{Im} z)^{4/9} \left(\ln \left(\frac{(\operatorname{Im} z)^{4/9}}{\epsilon} \right) \right)^{2/3}.$$

4.2 Cas 2 : Oscillateur harmonique non-autoadjoint

Maintenant, considérons l'opérateur harmonique non-autoadjoint,

$$Q = (D_x)^2 + ix^2 \quad (4.7)$$

sur la droite réelle.

$\Sigma(p)$ est le premier quadrant supérieur, et $\partial \Sigma(p) = \mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+$.

Les lignes de niveaux de la résolvante sont symétriques par rapport à l'axe $e^{i\pi/4}\mathbb{R}$. Intéressons-nous ici au comportement asymptotique des lignes de niveaux. Au regard de la symétrie axiale, il suffit de considérer la partie des lignes qui se situe en dessous de l'axe de symétrie. Nous avons le résultat suivant de K. Pravda Starov :

Proposition 4.3 S_i est la symétrie axiale par rapport à l'axe $e^{i\pi/4}\mathbb{R}$. Il existe $C > 0$ tel que nous avons

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \epsilon\} \cup \\ S_i(\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \epsilon\}) \subset \sigma_\epsilon(Q)^c,$$

σ_ϵ désigne le ϵ -pseudospectre de Q .

Pour tout z dans l'image du symbole q , nous avons

$$q^{-1}(z) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z) \mid j = 1, 2\}, \quad (4.8)$$

$$\text{où } \frac{1}{2i}\{q, \bar{q}\}(\rho_\pm) > 0. \quad (4.9)$$

et si z_0 un point du bord, appartenant à \mathbb{R}_+ alors

$$q^{-1}(z_0) = \{(\xi_0, 0)\} \cap \{(-\xi_0, 0)\}, \quad \xi_0 > 0.$$

Nous nous trouvons donc dans le cas 2. Dans un voisinage de z_0 nous avons

$$\rho_+^1(z) = ((\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{2}}, -(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}), \quad \rho_-^1(z) = (-(\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{2}}, -(\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}), \\ \rho_+^2(z) = (-\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{2}}, (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_-^2(z) = ((\operatorname{Im} z)^{\frac{1}{2}}, (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}).$$

Le changement de variable $x = (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{2}}\tilde{x}$, nous permet d'identifier $Q - z$ à $(\operatorname{Re} z)\tilde{Q}$ où \tilde{Q} s'écrit

$$\left(\frac{1}{\operatorname{Re} z}D_x\right)^2 + ix^2 - 1 - i\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \text{ avec } h := \frac{1}{\operatorname{Re} z}, \quad y := \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}. \quad (4.10)$$

h est notre paramètre semiclassique et y est choisi petit.

Nous avons

$$\xi^2 + ix^2 - 1 - iy = (\xi - \sqrt{1 + iy - ix^2})(\xi + \sqrt{1 + iy - ix^2}), \\ =: (\xi - \varphi_1(x, y))(\xi - \varphi_2(x, y)). \quad (4.11)$$

Nous obtenons

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \varphi_1 dx = \int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} \varphi_2 dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \sqrt{1 + iy - ix^2} dx. \quad (4.12)$$

Nous souhaitons calculer cette intégrale.

Soit $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$, $F'(x) = \sqrt{1-x^2}$, nous avons

$$\frac{d}{dx}F\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}x}{\sqrt{1+iy}}\right) = \sqrt{1 - \frac{ix^2}{1+iy}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1+iy}}. \quad (4.13)$$

Donc

$$e^{-\frac{i\pi}{4}}(1+iy)\frac{d}{dx}F\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}x}{\sqrt{1+iy}}\right)=\sqrt{1+iy-ix^2}.$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}}\varphi_2 dx &= e^{-\frac{i\pi}{4}}(1+iy)\left(F\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{y}}{\sqrt{1+iy}}\right)-F\left(\frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{y}}{\sqrt{1+iy}}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{i\pi}{4}}(1+iy)\arcsin\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{y}}{\sqrt{1+iy}}\right),\end{aligned}\tag{4.14}$$

un développement limité donne

$$= e^{-\frac{i\pi}{4}}(1+iy)\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{y}}{\sqrt{1+iy}}+\frac{1}{6}\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}y^{3/2}}{(1+iy)^{3/2}}+\dots\right),\tag{4.15}$$

$$= \sqrt{1+iy}\sqrt{y}+\frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+iy)^{\frac{1}{2}}}y^{3/2}+\mathcal{O}(y^{5/2}).\tag{4.16}$$

Remarque 4.4 *On aurait pu aussi traiter l'intégrale (4.12) en remarquant que*

$$\int\sqrt{x^2+a}=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a}+a\ln(x+\sqrt{x^2+a})),$$

ce qui donne

$$\int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}}\varphi_2 dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}(i-y)\ln\frac{\sqrt{y}+\sqrt{i}}{-\sqrt{y}+\sqrt{i}}.$$

On retrouve (4.14) par la formule :

$$\arcsin(z)=-i\ln\left(iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Finalement, en prenant la partie imaginaire dans (4.16), on obtient

$$\operatorname{Im}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\varphi_1 dx=\operatorname{Im}\int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}}\varphi_2 dx=\frac{1}{2}y^{3/2}+\frac{1}{6}y^{3/2}=\frac{2}{3}y^{3/2}+\mathcal{O}(y^{5/2}).$$

Ensuite, remarquons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(\rho_+^1(1+iy))&=\frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(\sqrt{y},-1) \\ &=(-2\xi x-2\xi x)(-1,\sqrt{y})=4\sqrt{y}, \\ \frac{1}{2i}\{\bar{q},q\}(\rho_-^1(1+iy))&=4\sqrt{y}.\end{aligned}$$

On déduit alors le résultat suivant :

Proposition 4.5 Pour $\operatorname{Re} z \gg 1$ et $y := \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$, $h := \frac{1}{\operatorname{Re} z}$,

$$h \ll y^{3/2} \ll 1 \text{ soit } (\operatorname{Re} z)^{1/3} \ll \operatorname{Im} z \ll \operatorname{Re} z,$$

nous avons de manière précise,

$$\|(Q - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{1}{h} \operatorname{Im}(e^{-\frac{i\pi}{4}}(1 + iy) \arcsin(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{y}}{\sqrt{1+iy}}))\right)}{2(\operatorname{Re} z)^{1/4}(\operatorname{Im} z)^{1/4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^{1/4}(\operatorname{Re} z)^{1/4}}\right),$$

ou bien dans une forme simplifiée,

$$\|(Q - z)^{-1}\| \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp(\frac{2}{3} \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{(\operatorname{Re} z)^{1/2}} + \mathcal{O}(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/2}}{(\operatorname{Re} z)^{3/2}}))}{2(\operatorname{Re} z)^{1/4}(\operatorname{Im} z)^{1/4}} + \mathcal{O}(\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^{1/4}(\operatorname{Re} z)^{1/4}}). \quad (4.17)$$

Lignes de niveaux de la résolvante. On se sert de l'expression (4.17),

$$\frac{1}{\epsilon} = \|(Q - z)^{-1}\| = (4.17).$$

On obtient alors

$$-\ln \epsilon = \frac{2}{3} \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{(\operatorname{Re} z)^{1/2}} + \mathcal{O}(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/2}}{(\operatorname{Re} z)^{3/2}}) + \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^{1/4}(\operatorname{Im} z)^{1/4}}\right). \quad (4.18)$$

En oubliant le facteur logarithmique dans (4.18), on aurait

$$-\ln \epsilon = \frac{2}{3} \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{(\operatorname{Re} z)^{1/2}} + \mathcal{O}(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/2}}{(\operatorname{Re} z)^{3/2}}) = \frac{2}{3} \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{(\operatorname{Re} z)^{1/2}} (1 + \mathcal{O}(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z})) \quad (4.19)$$

Soit

$$(-\ln \epsilon)^2 \frac{9}{4} = \frac{(\operatorname{Im} z)^3}{\operatorname{Re} z} (1 + \mathcal{O}(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z})),$$

ainsi

$$\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z (-\ln \epsilon)^2 \frac{9}{4})^{1/3} (1 + \mathcal{O}(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z})). \quad (4.20)$$

(4.18) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} \left(\ln\left(\frac{2(\operatorname{Re} z)^{1/4}(\operatorname{Im} z)^{1/4}}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right)\right)^{2/3} + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}{(\operatorname{Re} z)^{2/3}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} (\ln(\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z))^{2/3} + \mathcal{O}((\operatorname{Re} z)^{1/3}) + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}{(\operatorname{Re} z)^{2/3}}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z = & \left(\frac{1}{6}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} \left(\ln(\operatorname{Re} z)^{4/3} (\ln(\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z))^{2/3} \right)^{2/3} \\ & + \mathcal{O}((\operatorname{Re} z)^{1/3}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Puisque $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$ et que $\ln(t \ln t) = (1 + o(1)) \ln t$ on obtient

$$\operatorname{Im} z = (1 + o(1)) \left(\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 3}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} (\ln \operatorname{Re} z)^{2/3}. \quad (4.23)$$

Résumons :

Proposition 4.6 *La partie des lignes de niveaux de l'oscillateur harmonique non-autoadjoint se situant en dessous de la droite $e^{i\pi/2}\mathbb{R}$ admet la représentation asymptotique suivante lorsque $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$*

$$\operatorname{Im} z = (1 + o(1)) \left(\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 3}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} (\ln \operatorname{Re} z)^{2/3}.$$

De manière plus précise si l'on considère la ligne de niveau $\frac{1}{\epsilon} = \|(Q - z)^{-1}\|$ alors nous avons

$$\operatorname{Im} z = (1 + o(1)) \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} \left(\ln\left(\frac{(\operatorname{Re} z)^{1/3}}{\epsilon}\right) \right)^{2/3}.$$

On remarquera que les lignes de niveaux de la résolvante ne se rapprochent pas à l'infini puisque partant de (4.21), nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z = & \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (\operatorname{Re} z)^{1/3} \left(\ln(\operatorname{Re} z)^{4/3} (\ln(\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z))^{2/3} - \ln \epsilon \right)^{2/3} \\ & + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}{(\operatorname{Re} z)^{2/3}}\right), \\ = & C_0 (\operatorname{Re} z)^{1/3} (\ln \operatorname{Re} z)^{2/3} \left(1 + C_1 \frac{-\ln \epsilon}{\ln \operatorname{Re} z} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \epsilon}{\ln \operatorname{Re} z}\right)^2 \right) \\ & + \mathcal{O}\left(\frac{(\operatorname{Im} z)^{5/3}}{(\operatorname{Re} z)^{2/3}}\right), \\ = & C_0 (\operatorname{Re} z)^{1/3} (\ln \operatorname{Re} z)^{2/3} + C'_0 (\operatorname{Re} z)^{1/3} \frac{-\ln \epsilon}{(\ln \operatorname{Re} z)^{1/3}} + \dots \end{aligned}$$

Le second membre tend vers l'infini pour un ϵ donné.

Projection spectrale. Ici nous nous intéressons à la projection spectrale de l'oscillateur harmonique non autoadjoint.

Théorème 4.7 (Davies, Kuijlaars) Soit l'opérateur $H = D_x^2 + z^4 x^2$ pour un complexe $z = e^{i\theta}$. Les valeurs propres sont notées $\lambda_n = z^2(2n+1)$. On note $N_{n,z}$ la norme du projecteur spectral $\frac{1}{2\pi i} \int_{D(\lambda_n, \epsilon)} (z - H)^{-1} dz$. Si $0 < \theta < \pi/4$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln N_{n,z} = 2 \operatorname{Re} (f(r(\theta) e^{i\theta}))$$

où

$$f(z) = z \sqrt{z^2 - 1} + \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

et

$$r(\theta) = (2 \cos(2\theta))^{-1/2}.$$

Nous allons redémontrer ce théorème avec nos estimations.

Preuve. Le changement de variable $x = (2n+1)^{1/2} \tilde{x}$ permet d'identifier $H - \lambda_n$ à $(2n+1)((hD_x)^2 + z^4 x^2 - z^2)$, avec $h = (2n+1)^{-1}$. Compte tenu de qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln N_{n,z} &= -\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{(z^2 - z^4 x^2)} dx = -\frac{1}{h} \operatorname{Im} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{(1 - z^2 x^2)} dx \\ &= \frac{1}{h} \operatorname{Re} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{(z^2 x^2 - 1)} dx, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x_+(z) &= \frac{\operatorname{Im} z^2}{\operatorname{Im} z^4} = \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{\sin(4\theta)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin(2\theta)}{2 \sin(2\theta) \cos(2\theta)}} = (2 \cos(2\theta))^{-1/2}, \\ x_-(z) &= -(2 \cos(2\theta))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Etant donné la remarque 4.4, il est facile de conclure. \square

4.3 Opérateur d'advection-diffusion

Ici nous calculons la résolvante d'un opérateur d'advection-diffusion au point $1+i$.

On considère l'opérateur non-autoadjoint sur le cercle

$$L = -\sin(x)(hD_x)^2 - ihD_x.$$

Fort des informations de [18], nous savons que l'image du symbole à l'infini est comprise entre les deux paraboles $\operatorname{Re} z = \pm(\operatorname{Im} z)^2$. Nous allons montrer que c'est exactement la frontière de son image. Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned}\ell^{-1}(z) &= \left\{ \left(\arcsin\left(-\frac{\operatorname{Re} z}{(\operatorname{Im} z)^2}\right), -\operatorname{Im} z \right) \right\} \cup \left\{ \left(\pi - \arcsin\left(-\frac{\operatorname{Re} z}{(\operatorname{Im} z)^2}\right), -\operatorname{Im} z \right) \right\} \\ &= \{\rho_+\} \cup \{\rho_-\}\end{aligned}\tag{4.24}$$

Nous avons

$$\frac{1}{2i}\{\ell, \bar{\ell}\}(\rho) = \xi^2 \cos(x).\tag{4.25}$$

Par souci de simplification, nous notons $\gamma := \frac{\operatorname{Re} z}{(\operatorname{Im} z)^2}$. Puisque $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, nous voyons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\{\ell, \bar{\ell}\}(\rho_+) &= (\operatorname{Im} z)^2 \sqrt{1-\gamma^2} > 0, \\ \frac{1}{2i}\{\ell, \bar{\ell}\}(\rho_-) &= -(\operatorname{Im} z)^2 \sqrt{1-\gamma^2} < 0.\end{aligned}$$

En utilisant l'annulation du crochet de Poisson sur le bord de l'image de l nous obtenons :

Lemme 4.8 *Soit $L = -\sin(x)(hD_x)^2 - ihD_x$ de symbole ℓ alors $\ell(T^*S^1)$ est bornée par les paraboles*

$$\operatorname{Re} z = -(\operatorname{Im} z)^2 \text{ et } \operatorname{Re} z = +(\operatorname{Im} z)^2.$$

De plus, nous affirmons que les points du bord de $\Sigma(\ell)$ sont tous d'ordre 2, à l'exception de l'origine.

Preuve. Nous allons calculer le deuxième crochet pour vérifier que les point du bord sont d'ordre 2

$$\begin{aligned}\{\ell, \frac{1}{2i}\{\ell, \bar{\ell}\}\}(\rho) &= \{-\sin(x)\xi^2 - i\xi, \xi^2 \cos(x)\} \\ &= 2\xi^3(\sin x)^2 + 2\xi^3(\cos x)^2 \\ &\quad + i\xi^2 \sin x \\ &= 2\xi^3 + i\xi^2(\sin x).\end{aligned}$$

Dans le cas où $\operatorname{Im} z$ ne s'annule pas, il est clair que le bord est d'ordre 2. \square

Soit le point $(1+i) - \alpha e^{i\theta}$ $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ où $\cos \theta = -1/\sqrt{5}$, $\sin \theta = 2/\sqrt{5}$. Nous partons pour α petit dans la direction donnée par la normale à la courbe $\partial\Sigma(\ell)$ au point $1+i$.

Nous avons les formules exactes plus les développements limités suivants (en utilisant $\arcsin(1 - x^2) \sim \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}|x| + \mathcal{O}(|x|^3)$) :

$$\begin{aligned}
x_+(\alpha) &= \arcsin\left(-\frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 - \alpha \sin \theta)^2}\right), \\
&= -\frac{\pi}{2} + \alpha^{1/2}(\sqrt{2} \times (-\cos \theta + 2 \sin \theta))^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha) \\
&= -\frac{\pi}{2} + \alpha^{1/2}(\sqrt{2} \times 5)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha), \\
x_-(\alpha) &= \pi - \arcsin\left(-\frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 - \alpha \sin \theta)^2}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \alpha^{1/2}(\sqrt{2} \times 5)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule 3.14 on aurait retrouvé

$$x_{\pm} = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{5}\alpha^{1/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^{1/2} + \mathcal{O}(\alpha).$$

Pour ξ_{\pm} nous avons

$$\xi_{\pm}(\alpha) = -1 + \alpha \sin \theta.$$

Avec les données exactes de x_{\pm} et ξ_{\pm} nous retrouvons

$$\frac{1}{2i}\{\ell, \bar{\ell}\}(\rho_{\pm}) \asymp \alpha^{1/2}.$$

Pour l'intégrale d'action, la fonction implicite $\varphi(x, z)$, vérifiant $\varphi(-\pi/2, 1+i) = -1$, de l'équation $-(\sin x)\xi^2 - i\xi - z = 0$ est

$$\frac{1}{2} \times \frac{-i + (-1 - 4z \sin(x))^{1/2}}{\sin x}, \quad (4.26)$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(x, z) &= \frac{-i \cos x}{2(\sin x)^2} \\
&+ \frac{2z(\cos x)(-1 - 4z \sin x)^{-1/2} - (\cos x)(-1 - 4z \sin x)^{1/2}}{(\sin x)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi'_x(-\pi/2, z) = 0$, et $\varphi''_x(-\pi/2, z) \neq 0$ on peut retrouver

$$\ell_0(z) = \text{Im} \int_{x_-}^{x_+} \varphi(x, z) dx \asymp \alpha^{3/2}. \quad (4.27)$$

Nous avons alors redémontré dans le cas de l'opérateur d'advection-diffusion, la formule que nous connaissions [16] :

Proposition 4.9 *Soit θ tel que $\cos \theta = -1/\sqrt{5}$, $\sin \theta = 2/\sqrt{5}$. Pour $h \ll \alpha^{3/2} < 1$, nous avons*

$$\|L - ((1+i) - \alpha e^{i\theta})\|^{-1} \sim \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\exp(\frac{1}{h} [\operatorname{Im} \int \varphi(x, (1+i) - \alpha e^{i\theta}))]_{x_-}^{x_+})}{(1 - \alpha \sin \theta) \sqrt{1 - \frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 - \alpha \sin \theta)^2}}} (1 + \mathcal{O}(\frac{h}{\alpha^{3/2}})) \\ + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h} \alpha^{1/4}}),$$

où

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2} \times \frac{-i + (-1 - 4z \sin(x))^{1/2}}{\sin x},$$

avec

$$x_+(\alpha) = \arcsin(-\frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 - \alpha \sin \theta)^2}), \\ x_-(\alpha) = \pi - \arcsin(-\frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 - \alpha \sin \theta)^2}).$$

Ce qui donne, après simplification

$$\|L - ((1+i) - \alpha e^{i\theta})\|^{-1} \asymp \frac{C}{h^{1/2} \alpha^{1/4}} e^{\frac{\alpha^{3/2}}{Ch}}.$$

Références

- [1] W. Bordeaux Montrieux, *Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints*, Thèse, CMLS, Ecole Polytechnique, 2008.
- [2] L.S. Boulton, *Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra*. J. Operator Theory 47(2)(2002), 413-429.
- [3] E.B. Davies, A.B.J. Kuijlaars, *Spectral Asymptotics of the Non-Self-Adjoint Harmonic Oscillator* J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), no. 2, 420-426.
- [4] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, LMS LN 268, Cambridge University Press (1999).
- [5] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, *Pseudospectra of (pseudo) differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., 57(2004), 384-415.
- [6] F. Faure, J. Sjöstrand, *Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows*, Comm. Math. Phys. 308 (2011), no. 2, 325-364.

- [7] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoints I : un modèle*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Sér. 6, 15 no. 2 (2006), p. 243-280.
- [8] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II* : Ann. Henri Poincaré, 2006, vol 7, n°6, 1035-1064.
- [9] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints*, Thèse, CMLS, Ecole Polytechnique, 2005.
- [10] M. Hager, J. Sjöstrand, *Eigenvalue asymptotics for randomly perturbed non-selfadjoint operators*, Math. Annalen, 342(1)(2008), 177-243.
- [11] B. Helffer, *On spectral problems related to a time dependent model in superconductivity with electric current*, Proceedings of the conference in PDE in Evian, Juin 2009, à paraître.
- [12] J. Martinet, *Sur les propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints provenant de la mécanique des fluides*, Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 2009.
- [13] A. Melin, J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex-valued phase functions*, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations, Lecture Notes, Springer, n° 459, 120-223.
- [14] A. Melin, J. Sjöstrand, *Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2*, Astérisque 284(2003), 181-244.
<http://xxx.lanl.gov/abs/math.SP/0111293>
- [15] K. Pravda-Starov, *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator*, J. London math. soc. (2) 73(3)(2006), 745-761.
- [16] J. Sjöstrand, *Resolvent estimates for non-self-adjoint operators via semi-groups*, pages 359-384 in International Mathematical Series Vol 13, Around the research of Vladimir Maz'ya III, Springer, Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2010.
- [17] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Société Mathématique de France , Astérisque.
- [18] L.N. Trefethen, M. Embree, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press (2005).
- [19] M. Zworski, L.C. Evans, *Lectures on semiclassical analysis, version 0.3*, <http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>
- [20] M. Zworski, *A remark on a paper of E.B Davies*, Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957.
- [21] M. Zworski, *Pseudospectra of Semi-classical Operators*, communication personnelle.